

SIMMETRIK KO'PHADLAR. SIMMETRIK KO'PHADLAR HAQIDAGI ASOSIY TEOREMA VA MISOLLAR

**Maxamadiyeva Aziza Sherali qizi¹, Namozov Diyorbek Baxtiyor o'g'li², Shodmonov Sardor
Abdusalom o'g'li³**

¹Termiz Davlat Pedagogika Instituti O'qituvchisi

^{2,3}Termiz Davlat Pedagogika Instituti talabasi

¹e-mail: azizamaxamadiyeva6@gmail.com, ²e-mail: diyorbeknamozov76@gmail.com

³e-mail: sardorshodmonov0608@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar nazariyasining muhim bo'limlaridan biri — simmetrik ko'phadlar tushunchasi batafsil yoritilgan. Simmetrik ko'phadlarning ta'rifi berilib, ularning asosiy xossalari tahlil qilinadi. Asosiy (elementar) simmetrik ko'phadlar tushunchasi kiritilib, ularning yordamida simmetrik ko'phadlarni ifodalash masalasi ko'rib chiqiladi. Maqolada simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema bayon qilinib, uning isboti ketma-ket va mantiqiy asosda keltirilgan. Shuningdek, ratsional sonlar maydoni ustida berilgan simmetrik ko'phadlarni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalashga doir bir qator amaliy misollar yechib ko'rsatilgan. Aniqmas koeffitsientlar usulidan foydalanish orqali hisoblashning qulay va samarali yo'llari namoyish etilgan. Tadqiqot natijalari algebra fanini o'qitish jarayonida, xususan, oliy ta'limda simmetrik ko'phadlar mavzusini chuqurroq o'zlashtirishda metodik ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Simmetrik ko'phadlar, asosiy simmetrik ko'phadlar, ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar, algebra, simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema, ratsional sonlar maydoni, aniqmas koeffitsientlar usuli, ko'phadlarni ifodalash.

KIRISH

Hozirgi kunda algebra fanining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lgan ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar nazariyasi matematik tahlil, algebraik tenglamalar, invariantlar nazariyasi hamda matematik modellashirishda keng qo'llanilmoqda. Ushbu yo'nalishda alohida ahamiyatga ega bo'lgan tushunchalardan biri — simmetrik ko'phadlar hisoblanadi. Simmetrik ko'phadlar o'zgaruvchilarning o'rinlarini almashtirish natijasida o'zgarmasligi bilan xarakterlanadi va bu xossa ularni nazariy hamda amaliy jihatdan chuqur o'rganishni taqozo etadi.

Simmetrik ko'phadlar algebra fanida ko'plab muhim natijalarning asosini tashkil etadi. Xususan, ko'p o'zgaruvchili ko'phadlarni soddalashtirish, tenglamalar sistemasini yechish hamda algebraik ifodalarni umumiy ko'rinishga keltirishda simmetrik ko'phadlar va ularning asosiy (elementar) ko'rinishlari muhim rol o'ynaydi. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema esa har qanday simmetrik ko'phadni elementar simmetrik ko'phadlar orqali yagona tarzda ifodalash mumkinligini ta'kidlaydi.

Mazkur maqolada simmetrik ko'phadlar tushunchasi, ularning asosiy xossalari hamda elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanishi masalalari yoritilgan. Shuningdek, simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremaning isboti ketma-ketlik va mantiqiy asosda keltirilib, ratsional sonlar maydoni ustida berilgan simmetrik ko'phadlarni elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalashga oid amaliy misollar ko'rib chiqilgan. Aniqmas koeffitsientlar usulidan foydalanish orqali hisoblash jarayonining qulayligi va samaradorligi ko'rsatib berilgan.

Tadqiqot natijalari oliy ta'lim muassasalarida algebra fanini o'qitishda, xususan, simmetrik ko'phadlar mavzusini o'zlashtirish jarayonida nazariy va metodik ahamiyatga ega bo'lib, talabalar bilimini mustahkamlashda samarali vosita bo'lib xizmat qiladi.

MATERIALLAR VA METODLAR:

Ushbu maqolamizda biz fundamental yechish usullardan foydalanib simmetrik ko'phadlarni aniqmas koeffitsientlar usulida yechishni ko'rib chiqdik.

1-ta'rif. Agar ko'p noma'lumli ko'phaddagi ixtiyoriy ikkita noma'lumning o'rinlarini almashtirishdan ko'phad o'zgarmasa, u holda bunday ko'phad **simmetrik ko'phad** deyiladi.

1-misol. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$ ko'phad simmetrik ko'phaddir, chunki bu ko'phaddagi x_1, x_2, x_3 noma'lumlarning hamma o'z o'rinlarini almashtirib chiqsak, ko'phad o'zgarmaydi. Chunonchi, x_1 va x_2 nomalumlarni bir-biri bilan almashtirsak, $x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^2 x_3 + x_2 x_1 x_3^2$ ko'phad hosil bo'lib, bu esa yana ko'phadning o'zginasidir. Shunga o'xshash, x_2 va x_3 ni almashtirib, $x_1^2 x_3 x_2 + x_1 x_3^2 x_2 + x_1 x_3 x_2^2$ ko'phadni hosil qilamiz. Bu esa yana berilgan ko'phadning o'zidir.

n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlarning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi yana n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlar bo'ladi. Haqiqatan, noma'lumlarning istalgan o'rin almashtirishi har qaysi simmetrik ko'phadni o'zgarmasa, ravshanki, ularning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi ham o'zgarmaydi. Masalan, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ va $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ simmetrik ko'phadlar quyidagi algebraik yig'indisi va ko'paytmasi yana simmetrik ko'phadlardir:

$$f_1 \pm f_2 = x_1 + x_2 + x_3 \pm x_1 x_2 x_3;$$

$$f_1 \cdot f_2 = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2.$$

2-ta'rif. $x_1, x_2, \dots, x_n$ nomalu'mlardan tuzilgan.

$$\tau_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\tau_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\tau_n = x_1 x_2 \dots x_n \quad (1)$$

simmetrik ko'phadlar **asosiy (elementar) simmetrik ko'phadlar** deb ataladi.

Yuqoridagi misolni $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \times x_1 x_2 x_3$ ko'rinishida yozib, $\tau_1 = x_1 + x_2 + x_3$ va $\tau_3 = x_1 x_2 x_3$

ekanini e'tiborga olsak, u holda $f = \tau_1 \tau_2 - 3 \tau_3$ tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, berilgan simmetrik ko'phad **asosiy simmetrik ko'phadlar** orqali ifodalanadi.

Yana

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_2 x_3 + 3x_1 x_3 + x_3^2 - 3x_1 x_2 x_3$$

simmetrik ko'phadni

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 3x_1 x_2 x_3$$

ko'rinishida olib

$$\tau_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \tau_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad \tau_3 = x_1 x_2 x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tau_1^2 + \tau_2 - 3\tau_3$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, bu ko'phad ham simmetrik ko'phad asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanadi.

1-teorema. Φ maydon ustidagi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ asosiy simmetrik ko'phadlarning

$$a_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + a_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + a_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n} \quad (2)$$

ko'phadi faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ bo'lgandagina nolga teng bo'la oladi, bu yerda $\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i$ manfiy bo'lmagan butun sonlardir.

Isboti. (2) ko'phadning har bir

$$a_i \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n} \quad (3)$$

hadi, ma'lumki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarning biror ko'phadidan iborat, chunki (3) ga

$$\tau_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\tau_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\tau_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

qiymatlarini qo'yib, ko'rsatilgan amallarni bajarsak, xuddi aytilgan ko'phad kelib chiqadi.

(2) ko'phadning eng yuqori hadini topamiz. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ning eng yuqori hadlari mos ravishda,

$$x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 \dots x_n$$

bo'lgani uchun (3) ko'paytmaning eng yuqori hadi

$$\begin{aligned} a_i x_1^{\gamma_i} (x_1 x_2)^{\gamma_2} (x_1 x_2 x_3)^{\gamma_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\gamma_n} = \\ = a_i x_1^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} x_2^{\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n} \dots x_n^{\gamma_n} \quad (4) \end{aligned}$$

bo'ladi. Xuddi shu yo'l bilan (3) yig'indidagi har bir qo'shiluvchining eng yuqori hadini aniqlab chiqamiz. Bu yuqori hadlar orasida bir-biriga o'xshash hadlar yo'q. Haqiqatan, agar (4) biror boshqa yuqori hadni bir-biriga o'xshash desak,

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n,$$

$$\gamma_2 + \dots + \gamma_n = \delta_2 + \dots + \delta_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\gamma_n = \delta_n$$

tengliklardan $\gamma_1 = \delta_1, \gamma_2 = \delta_2, \dots, \gamma_n = \delta_n$ ni topamiz.

Bu esa (3) ko'phadning

$$a_i \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} \text{ va } a_j \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n}$$

ko'phadlari o'xshash ekanini ko'rsatadi. Ammo, bizga ma'lumki, ko'phadning o'xshash hadlari yo'q deb faraz qilamiz.

Endi aytilgan yuqori hadlar orasida eng yuqorisi, masalan,

$$a_i x_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} x_2^{\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (5)$$

bo'lsin. Bu yakka, ravshanki, (2) ni $x_1, x_2, \dots, x_n$ ning eng yuqori ko'phadi deb qarasak, (5) had uning eng yuqori hadi bo'ladi. Shu sababli (2) ni

$$a_i x_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} x_2^{\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} + Q \quad (6)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bunda Q — qolgan hamma hadlarning yig'indisi. $a_1 \neq 0$ holda, (6) yig'indi va, demak, (2) ham nolga teng bo'la olmaydi. $a_1 = 0$ bo'lgan holda, (2) ko'phad

$$a_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + a_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n}$$

ko'rinishini oladi. Yuqoridagi mulohazani takrorlab, $a_2 \neq 0$ holda bu ko'phadning nolga teng bo'la olmasligini isbotlaymiz va h. k.

Bu teorema asosan, ikki $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ va $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ko'phaddan har birining hadlari ikkinchisining hadlariga aynan teng bo'lgan holdagina bu ko'phadlar bir-biriga teng degan natijaga kelamiz.

Haqiqatan, bir ko'pxad maydonda $a_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n}$ had mavjud bo'lib, ikkinchisida bo'lmasa, ikkinchi ko'pxadga hadni qo'shish mumkinligini nazarda tutib, bu ikki ko'pxadni

$$j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = a_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + a_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + a_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n}$$

va

$$\psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = b_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + b_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + b_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n}$$

ko‘rinishida yozaylik. Endi, ko‘pxadlarni bir-biriga tenglashtirgandan keyin ushbu tenglikka kelamiz:

$$(a_1 - b_1)\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + (a_2 - b_2)\tau_1^{\beta_1}\tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + (a_k - b_k)\tau_1^{\gamma_1}\tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n} = 0.$$

Bundan, yuqorida isbotlanganlarga muvofiq, $a_i - b_i = 0$ yoki $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) hosil bo‘ladi.

2-teorema (simmetrik ko‘pxadlar haqidagi asosiy teorema). Φ maydon ustidagi har qanday simmetrik ko‘pxad shu maydon ustida elementar simmetrik ko‘pxadlar orqali yagona ifodalanadi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik ko‘pxad va uning eng yuqori hadi

$$a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (7)$$

bo‘lsin. (7) hadning daraja ko‘rsatkichlari $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Haqiqatan, simmetrik ko‘pxadda x_1 va x_2 ning o‘rinlarini almashtirsak, ma’lumki, funksiya o‘zgarmaydi. Bu almashtirish natijasida (7) had shu simmetrik ko‘pxadning $a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o‘tadi. Ammo (7) eng yuqori had bo‘lgani uchun, $\alpha_i \geq \alpha_n$. Shuningdek, simmetrik ko‘pxadga x_1 va x_n ni o‘zaro almashtirsak, (7) had ko‘pxadning $a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o‘tadi va bundan $\alpha_2 \geq \alpha_3$ hosil bo‘ladi va h. k.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarning $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ asosiy simmetrik ko‘pxadlarini olib, shu noma'lumlarning simmetrik ko‘pxadni bo‘lgan ushbu

$$a_1 \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \tau_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \tau_n^{\alpha_n} \quad (8)$$

ko‘paytmani tuzaylik. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ning eng yuqori hadlari, mos ravishda $x_1; x_1 x_2; x_1 x_2 x_3; \dots x_1 x_2 \dots x_n$ bo‘lgani sababli (8) ko‘paytmaning eng yuqori hadi

$$a_1 x_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot (x_1 x_2)^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_n} = a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

bo‘ladi. Bunda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko‘phadning eng yuqori hadi kelib chiqqanini ko‘ramiz. Shu sababli, ikkita simmetrik ko‘phadning ayirmasi bo‘lgan

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a_1 \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \tau_n^{\alpha_n}$$

simmetrik ko‘phadda (8) had bo‘lmaydi. Shu mulohazani $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ga nisbatan takrorlab,

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_1 \tau_1^{\beta_1 - \beta_2} \tau_2^{\beta_2 - \beta_3} \dots \tau_n^{\beta_n}$$

simmetrik ko‘phadni tuzamiz. Uning hadlari $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ning eng yuqori hadidan kichikdir va h. k. Bu jarayon chekli ravishda davom yetadi. Haqiqatan, $f_1, f_2, f_3, \dots$ simmetrik ko‘phadlardan istalganining yuqori hadi ni

$$m x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \quad (9)$$

orqali belgilasak, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ tengsizliklarga ega bo‘lamiz. Ammo bu tengsizliklarni faqat chekli son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ko‘rsatkichlar (manfiy yemas butun sonlar) qanoatlantirishi mumkin. Demak, (9) ko‘rinishidagi yuqori hadlarning, shuningdek, $f_1, f_2, f_3, \dots$ ko‘phadlarning soni faqat chekli bo‘la oladi.

Shunday qilib, chekli qadamlardan keyin $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik ko‘phad $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ning o‘sha Φ maydon ustidagi ko‘phadi sifatida ifodalanadi, ya’ni

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \quad (10)$$

tenglik o'rinli.

Endi (10) ifodalanuvchini yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik ko'phad (10) dan boshqa yana $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ning ikkinchi ψ ko'phadi bilan ushbu

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \quad (11)$$

ko'rinishida ifodalansin. (10) va (11) ning chap tomonlari bir xil ekanligidan $g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik yesa $g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ va $\psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ko'phadlardan har biri-birining hadlari aynan teng, ya'ni bu ko'phadlar aslida bitta ko'phad yekanini ko'rsatadi. Demak, (10) ifodalanish yagona ekan.

2-misol. Ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3$$

simmetrik ko'phadni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalang.

$f(x_1, x_2, x_3)$ ning eng yuqori hadi $x_1^3 x_2^3$ bo'lgani uchun, $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 0$. Teoremaga asosan quyidagi ayirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) - \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \tau_3^{\alpha_3} &= \\ &= (x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3) - \tau_1 \tau_2^2 = \\ &= (x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3) - (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 = \\ &= x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 - (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 = \\ &= 2\tau_3 \tau_1^2 + \tau_2 \tau_3 \end{aligned}$$

Demak, $f(x_1, x_2, x_3) = 2\tau_1^2 \tau_3 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_2^2$ bo'ladi.

Simmetrik ko'phadlarni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalashning amaliy jihatdan qulay usuli ni ko'rib o'tamiz. Bu **aniqmas koeffitsientlar usuli** deyiladi. Usulning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan simmetrik ko'phad formalari yig'indisiga ajratiladi (ravshanki, har bir forma o'z navbatida simmetrik ko'phadni ifodalaydi*) so'ngra **aniqmas koeffitsientlar usuli** bilan har bir forma asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanadi.

3-misol. Ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2$$

simmetrik ko'phadni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalang.

$f(x_1, x_2, x_3)$ ning eng yuqori hadi $x_1^2 x_2$ bo'lgani uchun, $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$. Teoremaga asosan quyidagi ayirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) - \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \tau_3^{\alpha_3} &= \\ &= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2) - \tau_1 \tau_2 = \\ &= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2) - \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 3x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Bunda $x_1 x_2 x_3 = \tau_3$ Demak, $f(x_1, x_2, x_3) = \tau_1 \tau_2 - 3\tau_3$ bo'ladi.

4-misol. Ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

simmetrik ko'phadni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalang.

Berilgan ko'phad quyidagi ikkita forma yig'indisiga ajraladi:

* Chunki o'zgaruvchilarining o'rinlarini almashtirganda hadlarining darajalari o'zgarmaydi.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \\ &= (x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^2) + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \end{aligned}$$

Avval birinchi

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^3 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^2$$

formani olib asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalaymiz. 2-teoremaning isbotida aytilgan hamma f_1, f_2, f_3 , simmetrik ko'phadlarning eng yuqori hadlarini hisobga olamiz. Bunda φ_1 ko'phad 6-darajali forma bo'lgani uchun f_1, f_2, f_3 , simmetrik ko'phadlar ham 6-darajali formalardan iborat bo'lishi kerak. Shu bilan birga, har bir yuqori hadning $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ daraja ko'rsatkichlari $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartlarni qanoatlantirishi kerakligini ham nazarda tutishimiz lozim. Bunda φ_1 ko'phadning eng yuqori hadi $x_1^3 x_2^2 x_3$ bo'lib, daraja ko'rsatkichlari 3, 2, 1 sistemani tuzadi. Keyingi f_1 ko'phadning eng yuqori hadi φ_1 ning yuqori hadidan kichik bo'lishi kerak. Shu sababli, bu ikkinchi yuqori hadning daraja ko'rsatkichlari uchun faqat 2, 2, 2 sistemani hosil qilamiz, chunki shundan boshqa sistema $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartlarni bir vaqtda qanoatlantira olmaydi. Shu bilan jarayon tugaydi, chunki keyingi f_2 simmetrik ko'phadning eng yuqori hadi uchun $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartni qanoatlantiruvchi daraja ko'rsatkichlar sistemasi eng yo'q*.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Ushbu aniqmas koeffitsientlar usuli yordamida olgan natijalarimizni quyidagi jadvalda ifodalaymiz.

Eng yuqori hadlarning daraja ko'rsatkichlari sistemasi	Eng yuqori hadlari	Asosiy simmetrik ko'phadlardan tuzilgan ko'paytmalar
3 2 1	$x_1^3 x_2^2 x_3$	$\tau_1^{3-2} \tau_2^{2-1} \tau_3^1 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$
2 2 2	$a x_1^2 x_2^2 x_3^2$	$a \tau_1^{2-2} \tau_2^{2-2} \tau_3^2 = a \tau_3^2$

Bu jadvaldan quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \tau_1 \tau_2 \tau_3 + a \tau_3^2 \quad (12)$$

f_2 ning eng yuqori hadi f_1 ning yuqori hadlaridan past bo'lishi shart bilan.

Noma'lum a koeffitsientini aniqlaymiz. Shu maqsadda, (12) tenglikni mukammal

$$\begin{aligned} & x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^3 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^2 \\ & = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) x_1 x_2 x_3 + a(x_1 x_2 x_3)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

ko'rinishida yozib, x_1, x_2, x_3 ga shunday ixtiyoriy qiymatlar beramiz, ularning yordami bilan a ning qiymatini aniqlash mumkin bo'lsin.

Masalan, $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -1$ d esak, (13) dan $-12 = 0 + 4a$ yoki $a = -3$ kelib chiqadi. Demak,

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \tau_1 \tau_2 \tau_3 - 3 \tau_3^2$$

tenglik hosil bo'ladi. Endi xuddi shu usul bilan ikkinchi $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ forma uchun jadval tuzamiz:

Eng yuqori hadlarning daraja ko'rsatkichlari sistemasi	Eng yuqori hadlar	Asosiy simmetrik ko'phadlardan tuzilgan ko'paytmalar
3 0 0	x_1^3	$\tau_1^{3-0} \tau_2^{0-0} \tau_3^0 = \tau_1^3$
2 1 0	$a x_1^2 x_2$	$a \tau_1^{2-1} \tau_2^{1-0} \tau_3^0 = a \tau_1 \tau_2$
1 1 1	$b x_1 x_2 x_3$	$b \tau_1^{1-1} \tau_2^{1-1} \tau_3^1 = b \tau_3$

Jadvalga asosan quyidagini topamiz:

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \tau_1^3 + a \tau_1 \tau_2 + b \tau_3$$

yoki

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 + a(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + b(x_1 x_2 x_3) \quad (14)$$



Agar o'zgaruvchilarga $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ qiymatlar bersak, (14) dan $2 = 8 + 2a, a = -3$ hosil bo'ladi.

So'ngra $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ qiymatlarda (14) dan $a = -3$ ekanini e'tiborga olib, $3 = 27 - 27 + b, b = 3$ ni topamiz. Demak,

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3$$

tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, berilgan $f(x_1, x_2, x_3) \dots$

*(13) aynan bo'lgani uchun o'zgaruvchilarning har qanday qiymatlarida ham o'rindir.

(x_1, x_2, x_3) simmetrik ko'phad asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ushbu ko'rinishda ifodalanadi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tau_1\tau_2\tau_3 - 3\tau_3^2 + \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3$$

Simmetrik ko'phadlarni o'rganish jarayonida ularning asosiy xossalari va algebraik tuzilmasi muhim ilmiy ahamiyatga ega ekanligi aniqlandi. Tadqiqot davomida ko'p o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlarning elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanishi nafaqat nazariy jihatdan asosli, balki amaliy hisoblashlarda ham samarali ekanligi ko'rsatildi. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremaning qo'llanilishi orqali murakkab algebraik ifodalarni soddalashtirish va ularni yagona ko'rinishda ifodalash imkoniyati yuzaga keladi.

Amaliy misollar tahlili shuni ko'rsatdiki, aniqmas koeffitsientlar usuli simmetrik ko'phadlarni elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalashda qulay va tushunarli yondashuv hisoblanadi. Ushbu usul hisoblash jarayonini tizimli ravishda olib borishga imkon yaratib, o'zgaruvchilar soni ko'paygan holatlarda ham aniqlikni saqlab qoladi. Bu esa mazkur usulni oliy ta'limda algebra fanini o'qitish jarayonida samarali metod sifatida qo'llash mumkinligini ko'rsatadi.

Shuningdek, simmetrik ko'phadlar nazariyasining o'rganilishi talabalar mantiqiy fikrlashini rivojlantirish, algebraik munosabatlarni umumlashtirish hamda matematik tafakkurni shakllantirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Mazkur natijalar simmetrik ko'phadlarning nafaqat sof algebra doirasida, balki matematik modellashtirish va boshqa sohalarda ham qo'llanish imkoniyatlari mavjudligini tasdiqlaydi.

XULOSA:

Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlar tushunchasi, ularning asosiy xossalari hamda elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanishi masalalari tizimli ravishda yoritildi. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema va uning isboti asosida har qanday simmetrik ko'phadni elementar simmetrik ko'phadlar orqali yagona tarzda ifodalash mumkinligi asoslab berildi.

Tadqiqot davomida keltirilgan misollar va hisoblashlar simmetrik ko'phadlarni ifodalashda aniqmas koeffitsientlar usulining samaradorligini ko'rsatdi. Olingan natijalar oliy ta'lim muassasalarida algebra fanini o'qitishda, xususan, simmetrik ko'phadlar mavzusini o'rganishda nazariy va amaliy ahamiyatga ega ekanligini tasdiqlaydi.

Kelgusida ushbu yo'nalishda olib boriladigan tadqiqotlar simmetrik ko'phadlarning kompyuter algebra tizimlarida qo'llanilishi, algoritmik yechimlar ishlab chiqish hamda ularning amaliy masalalarda tatbiq etilish imkoniyatlarini kengaytirishga xizmat qilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 512 с.
2. P.N.Nazarov, B.T.Toshpo'latov, A.D.Do'sumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. — Toshkent: O'qituvchi, 1995. — 192-200 b
3. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976. — 456 с.
4. Маклейн С., Биркгоф Г. Алгебра. — М.: Мир, 1982. — 480 с.
5. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. — New York: Springer, 2015. — 646 p.
6. Artin M. Algebra. — Boston: Pearson, 2011. — 832 p.