

УСЛОВИЯ НЕКРАЙНОСТИ ГИББСОВСКОЙ МЕРЫ ДЛЯ ОДНОЙ НС-МОДЕЛИ

Мадгозиев Г.Т., Рузибоева Ф.Р., Комилжонова Л.К.

студентки, 4-курс

Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

E-mail: madgoziyevg@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса.

Keywords. Cayley tree, configuration, НС-model, Gibbs measure.

Kalit so‘zlar. Keli daraxti, konfiguratsiya, НС model, Gibbs o‘lchovi.

Annotasiya: НС modelining translyatsiya-invariant Gibbs o‘lchovi $\lambda > \lambda_{cr} \approx 2.6639$ faollik koeffitsientida ekstremal emasligi ko‘rsatilgan.

Аннотация: Показано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса НС- модели не является крайней при коэффициенте активности $\lambda > \lambda_{cr} \approx 2.6639$

Abstract: It is shown that the translation-invariant Gibbs measure of the НС model is not extreme at the activity coefficient $\lambda > \lambda_{cr} \approx 2.6639$

Определения и постановка задачи

Дерево Кэли $\Gamma^k(V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер.

Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существуют ребро $l \in L$ и соединяющие их, т.е. $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

где $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – ближайшие соседи.

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

Будем писать $x \prec y$, если путь из x^0 до y проходит через X . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины X , если $x \prec y$, и x, y являются ближайшими соседями.

Для $x \in W_n$ введем обозначение $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Обобщенный символ Кронекера

$$U(\sigma_A) : \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min\{|A|, |\Phi|\}\}$$

определим следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \quad (1)$$

где $A \subset V$ и $|\sigma_A \cap \Phi|$ — число различных значений $\sigma_A(x), x \in A$. (см [9]).

В этой работе мы рассмотрим случай $\Phi = \{-1, 1\}$ и $|A| = 4$.

Гамильтониан определяется следующим образом

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad (2)$$

где $J > 0$.

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией Гиббсовских мер, можно найти, например, в [1]. В работе [6] построен несчетное множество крайних Гиббсовских мер модели Изинга. В работе [5] найдено достаточное условие крайности меры Гиббса (см. например [1]-[7] для других моделей).

Целью настоящей работы определение условий для некрайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели (2).

Условия согласованности:

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x)}^{\downarrow}} \right\}, \quad (3)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$, Z_n — нормирующий множитель и $h_{b(x), \sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x)}^{\downarrow}} \in R$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (4)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V , такая, что

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Теорема 1. [8]. Пусть $k = 2$. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$ в (3) является согласованное тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ имеют место следующие:

$$\begin{aligned} y_{a,0} = y_{a,6} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,1} = y_{a,7} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,2} = y_{a,8} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,3} = y_{a,9} &= \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_{a,4} = y_{a,10} = \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \quad y_{a,5} = 1,$$

где $\lambda = \exp\{\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = \exp(h_{a,i} - h_{a,11})$, $i = \overline{0, 10}$.

Условие некрайности меры μ_0 .

В этом пункте мы находим условие некрайности меры Гиббса μ_0 .

Теорема 2. Если $\lambda > \lambda_{cr} \approx 2.6639$, то мера μ_0 (соот. единс.решение $y^3 + (1-\lambda)y^2 - 1 = 0$) является некрайней.

Условие крайности меры μ_0 .

Для проверки крайности меры μ_0 мы используемся достаточным условия крайности (см. ([5]-стр 165)) $k\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$, где

$$\kappa \equiv \kappa(\mu) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_l |P_{i,l} - P_{j,l}|.$$

$$\gamma \equiv \gamma(\mu) = \sup_{A \subset \Gamma^k} \max \left\| \mu_A^{\eta^y, s} - \mu_A^{\eta^y, s'} \right\|_x. \quad (6)$$

здесь $\mu_A^{\eta^y, s}$ — мера Гиббса с граничным условием

$\eta^y, s, \eta(y) = s, p(s) = \mu_A^{\eta^y, 0}(\sigma(x) = s)$ и максимум берется по всем граничным условиям η , всеми $y \in \partial A$, всеми соседями $x \in A$ вершины y и всеми спинами $s, s' \in \{1, 2, \dots, 11\}$.

Гипотеза. Мера μ_0 является не крайней при всех положительных значениях параметра λ .

ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H.O. Georgii. Gibbs measures and phase transitions. de Gruyter Stud. Math. 9, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [2] U.A. Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees: results and open problems. Rev. Math. Phys. 2013, v.25, No.1, 1330001(112 pages).
- [3] H. Kesten, B.P. Stigum, Additional limit theorem for indecomposable multi-dimensional Galton-Watson processes. Ann. Math. Statist. 37. (1966), 1463-1481.
- [4] C. Kuelske, U.A. Rozikov. Extremality of Translation-Invariant Phases for a Three-State SOS-Model on the Binary tree. Jour. Stat. Phys.:2015. 160: 659-680.
- [5] Martinelli, F., Sinclair, A., Weitz, D: Fast Extremality mixing for independent sets, coloring and other models on trees. Random Struct. Algorithms 31, 134-172 (2007).
- [6] Блехер П.М., Ганиходжаев Н.Н. Теория вероят. и ее примен., 1990. т. 35, вып. 2.-с. 920-930.
- [7] Rozikov U.A.: Gibbs Measures on Cayley Trees. World Sci, Publ, Singapore (2013).
- [8] У.А. Розиков, Г.Т. Мадгозиев. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли. Теор. и матем. физика. 2011, N.2.-с. 311-322.
- [9] Rozikov U.A. Jour. Stat. Phys., 2008, V.130, No.2, p.801-813.
- [10] Rozikov U.A. Jour. Stat. Phys. 2006. V. 122, No. 2, p. 217-235.