

DIOFANT TENGLAMALARI

Bektoshev Quvondar Hakimovich¹ , Xurramov Shuxrat Isoqovich²

¹Toshkent amaliy fanlar universiteti, “Raqamli va fundamental fanlar ” kafedrası katta o‘qituvchisi

²Toshkent amaliy fanlar universiteti, “Raqamli va fundamental fanlar ” kafedrası katta o‘qituvchisi

¹kuvan.bektoshev.73@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2869-4188>

²khurramov86sh@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3875-5723>

Annotatsiya: Diofant tenglamalarini yechish alohida e’tibor, malaka va bilimni talab qiladi. Shuning uchun ham Diofant tenglamalari fan olimpiadalarining turli bosqichlarida, Xalqaro olimpiada topshiriqlarida alohida ahamiyatga ega. Maqolada Diofant tenglamalari haqida qisqacha ma’lumotlar berilgan va ularni yechish bo’yicha bir nechta misollar berilgan.

Аннотация: Решение уравнений диофанта требует особого внимания, умений и знаний. Поэтому уравнения Диофанта имеют особое значение на различных этапах предметных олимпиад, в заданиях Международной олимпиады. В статье приводятся краткие сведения о уравнениях Диофанта и несколько примеров их решения.

Annotation: Solving diophantine equations requires special attention, skills and knowledge. Therefore, the Diophantus equations are of particular importance at various stages of subject olympiads, in the tasks of the International Olympiad. The article provides a summary of the Diophantus equations and several examples of their solution.

Tayanch so‘zlar: Algebraik tenglamalar, koeffitsiyent, uzluksiz kasrlar, butun koeffitsiyentli algebraik tenglamalar sistemalari, aniqmas tenglamalar, chiziqli diofant tenglamalari, yechim.

Ключевые слова: Алгебраические уравнения, коэффициент, непрерывные дроби, системы алгебраических уравнений с целым коэффициентом, неопределенные уравнения, линейные диофантовые уравнения, решение.

Keywords: Algebraic equations, coefficient, continued fractions, systems of algebraic equations with integer coefficient, indefinite equations, linear Diophantine equations, solution.

KIRISH

Diofant tenglamalari - ikki yoki undan ko‘p noma’lum qatnashgan, koeffitsiyentlari butun sonlar bo‘lgan algebraik tenglamalar; bunda butun yoki ratsional sonlardan iborat yechimlari izlanadi. Birinchi darajali Diofant tenglamalarining umumiy nazariyasini 17-asrda yashagan fransuz matematigi Bashe yaratgan. Ferma, Eyler, Lagranj va Gauss tadqiqotlari natijasida 19-asr boshlarida ikkinchi darajali Diofant tenglamalari asosan tekshirilgan edi. Diofant tenglamalarini tekshirish

usullari uzluksiz kasrlar nazariyasiga asoslangan. Diofant tenglamalari deganda noma'lumlari soni tenglamalari sonidan ko'p bulgan butun koefitsiyentli algebraik tenglamalar sistemalari ham tushuniladi. Diofant tenglamalari, ba'zan, aniqmas tenglamalar deb yuritiladi.

Diofant tenglamalarini yechish alohida e'tibor, malaka va bilimni talab qiladi. Shuning uchun ham Diofant tenglamalari fan olimpiadalarining turli bosqichlarida, Xalqaro olimpiada topshiriqlarida alohida ahamiyatga ega.

Diofant tenglamalarining umumiy korinishi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

shaklda bo'ladi. Bu yerda f ifoda $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar butun sonlar bo'lganida butun qiymatlar qabul qiladi.

Diofant tenglamalari III asrda yashagan yunon matematigi Diofant sharafiga shunday nomlangan. Aytish joizki, bunday tenglamalarni yechishning umumiy usuli mavjud emas.

Ta'rif. Ushbu $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ko'rinishdagi tenglamalar chiziqli diofant tenglamalari deyiladi. Bunda

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \text{ va } a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0.$$

Endi shunga o'xshash ba'zi bir diofant tenglamalarining yechilishlarini ko'rib chiqamiz .

1-misol. Tenglamaning barcha natural x, y yechimlarini toping

$$7x + 13y = 113.$$

Yechish: Tenglamadan x ni topamiz va undan butun qismini ajratib yozamiz:

$$\begin{aligned} x &= \frac{113 - 13y}{7} = \frac{112 - 14y + 1 + y}{7} = \frac{112 - 14y}{7} + \frac{1 + y}{7} = \\ &= 16 - 2y + \frac{1 + y}{7} \end{aligned}$$

Bu ifoda natural son bo'lishi uchun ravshanki,

$$\frac{1 + y}{7}$$

ifoda butun son bo'lishi kerak. Keyingi hisoblashlar

$$\begin{aligned} \frac{1 + y}{7} &= k (k \in \mathbb{Z}), 1 + y = 7k, y = 7k - 1, \\ x &= \frac{113 - 13(7k - 1)}{7} = \frac{126 - 91k}{7} = 18 - 13k \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 18 - 13k > 0 \\ 7k - 1 > 0 \end{cases}$$

dan $k = 1$ bo'lishi kelib chiqadi.

$$k = 1 \text{ da } x = 18 - 13 \cdot 1 = 5, y = 7 \cdot 1 - 1 = 6$$

Javob: $x = 5, y = 6$.

2-misol. $3x^2 - 4y^2 = 13$ tenglamaning natural sonlardagi barcha yechimlarini toping.

Yechish: Berilgan tenglamani

$$4x^2 - 4y^2 - 12 = 1 + x^2$$

$$4(x^2 - y^2 - 3) = 1 + x^2$$

ko'rinishida yozamiz. Tenglikning chap qismi 4 ga karrali. Har qanday natural sonning kvadratini 4 ga bo'lganda qoldiqda 0 yoki 1 qolgani uchun $1 + x^2$ ifodani 4 ga bo'lganda qoldiq 1 yoki 2 ga teng bo'ladi, shuning uchun tenglikning o'ng tomoni 4 ga karrali emas. Demak, berilgan tenglama natural yechimga ega emas.

Javob: Tenglama natural sonlarda yechimga ega emas.

3-misol. $x^3 - y^3 = 91$ tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani ko'paytuvchilarga ajratamiz

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91.$$

91 sonini 2 ta sonning ko'paytmasi ko'rinishida yozamiz:

$$91 = (\pm 1) \cdot (\pm 91) = (\pm 7) \cdot (\pm 13) = (\pm 13) \cdot (\pm 7)$$

Bu ko'paytmalardan foydalanib mumkin bo'lgan barcha tenglamalar sistemalarini tuzamiz. Hisoblashlar suni ko'rsatadiki, faqat ushbu

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

sistema natural yechimga ega. Bu sistemadan $x = 5, y = 6$ yagona natural yechimni topamiz.

Javob:

$$x = 5, y = 6.$$

4-misol. Tenglamaning butun sonlardagi yechimlarini toping: $x + y = 2xy$.

Yechish. Tenglamadan y ni topamiz:

$$x = 2xy - y$$

$$\begin{aligned}
 2xy - y &= x \\
 y(2x - 1) &= x \\
 y &= \frac{x}{2x - 1}
 \end{aligned}$$

Tenglikni ikkala qismini 2 ga ko'paytirib, kasrning butun qismini ajratamiz:

$$2y = \frac{2x}{2x - 1} = \frac{2x - 1 + 1}{2x - 1} = \frac{2x - 1}{2x - 1} + \frac{1}{2x - 1} = 1 + \frac{1}{2x - 1}.$$

Bundan kelib chiqadiki,

$$\frac{1}{2x - 1}$$

ifoda butun son bo'lishi kerak. 1 soni $2x - 1$ ga bo'linishi kerak, bundan

$$2x - 1 = 1 \text{ yoki } 2x - 1 = -1.$$

Tenglamalarni yechib $x = 0, y = 0$ yoki $x = 1, y = 1$ ekanligini topamiz.

Javob: $x = 0, y = 0$ yoki $x = 1, y = 1$.

5-misol. Tenglamani butun sonlarda yeching.

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$$

Yechish: Tenglamaning chap tomonidagi qo'shiluvchilar ishoralari bir xil, (chunki, $\frac{xy}{z}, \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}$ larning ishorasi xyz ishorasi bilan bir xil) ularning yig'indisi musbat ekanligidan har bir qo'shiluvchining musbat ekanligi kelib chiqadi. x, y, z lar noldan farqli va musbat sonlar bo'lgani uchun $xyz \geq 1$ bo'ladi.

Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3 \sqrt[3]{xyz} \geq 3$$

tengsizlikdan $xyz = 1$ bo'ladi. Bundan yechim faqat $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1)$ uchliklardan iborat bo'lishini topamiz.

Javob: $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1)$.

XULOSA

Diofant tenglamalari haqida yuqorida berilgan ma'lumotlar, keltirilgan misollar o'quvchilarni tenglamalar haqidagi qarashlarini kengaytiradi, ularni yechishga bo'lgan qiziqishlarini yanada oshiradi va albatta matematika ixlosmandlariga foydali bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- [1] Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.N.Haydarov. Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent. «Tafakkur-bo‘stoni». 2019.
- [2] Yunusov A.S. va boshqalar. Qiziqarli matematika va olimpiyada masalalari. Toshkent, ‘O‘qituvchi’-2007 y. 216b
- [3] Ayupov Sh.A., Rixsiyev B.B., Qo‘chqorov, O.Sh. Matematika olimpiadalari masalalari. I, II qismlar, „FAN“ T., 2004.
- [4] R.M.Madrahimov, N.B.Kamalov, B.B.Yusupov, S.A.Bekmetova. Talabalar matematika olimpiadasi masalalari urganch – 2014
- [5] Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. *Избранные олимпиадные задачи*, Математика, Квант 2007, ст.162
- [6] Н.То‘rayev, I.Azizov, S.Otaqulov. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent. «Ilm ziyo». 2009.
- [7] А.А.Андреев. Ю.Н.Кузьмин, А.Н.Савин.Функциональные уравнения. «Пифагор», Самара, 1997.
- [8] Я.С.Бродский, А.К.Слипенко. Функциональные уравнения. Киев. «Вища школа», 1983.
- [9] Т.М. Банникова, Н.А. Баранова. Основы теории чисел. Ижевск. 2009.
- [10] Е.И.Деза, Л.В.Котова. Сборник задач по теории чисел. Москва. «Либроком». 2011.
- [11] М.И.Сканавининг умумий тахрири остида. Математикадан масалалар тўплами. Ўқитувчи.1983.
- [12] A.Quchqorov, Sh.Ismailov. Mantiqiy masalalar. Toshkent. 2008.
- [13] Sh.Ismailov, O.Ibrogimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari. Toshkent.2008.
- [14] Паркевич Е. В. Использование теорем Менелая и Чева при решении геометрических задач. Москва. 2014.