

МЕРЫ ГИББСА С ПЕРИОДОМ ДВА ДЛЯ НС-МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Мадгозиев Г.Т.¹, Исматиллаева С.З.², Ешболтаева Ш.Х.¹

¹Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

²студентка, 4-курс, Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

E-mail: madgoziyevg@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса.

Keywords. Cayley tree, configuration, HC-model, Gibbs measure.

Kalit so‘zlar. Keli daraxti, konfiguratsiya, HC model, Gibbs o‘lchovi.

Annotasiya: Biz yaqin qo'shni to'rt davlat qattiq yadroli ko'rib (НС) hil Cayley daraxt modellari. Model parametrlari bo'yicha ba'zi sharoitlarda biz qattiq davriy Gibbs o'lchovlari mavjudligini isbotlaymiz.

Аннотация: Мы рассматриваем жесткие модели с четырьмя состояниями ближайшего соседа (НС) на однородном дереве Кэли. При выполнении некоторых условий для параметров модели мы доказываем существование нескольких периодических мер Гиббса.

Abstract: We consider nearest-neighbor four state hard-core (НС) models on the homogeneous Cayley tree. Under some conditions on params of the model we prove the existence of several periodic Gibbs measures.

Введение

Информацию о НС-моделях можно найти в работах [1] и [2].

Определения и постановка задачи

Дерево Кэли $\Gamma^k(V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер.

Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существуют ребро $l \in L$ и соединяющие их, т.е. $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

где $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – ближайшие соседи.

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

Будем писать $x \prec y$, если путь из x^0 до y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $x \prec y$, и x, y являются ближайшими соседями.

Для $x \in W_n$ введем обозначение $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Множество $S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x . Если $S(x)$ – совокупность «прямых потомков» вершины x , то для любой вершины $x \in V$, отличной от x^0 , имеем $|S(x)| = k$ и $|S(x^0)| = k + 1$.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$.

Конфигурация на дереве Кэли задается $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\} \in \Phi^V$.

Рассмотрим граф G (см.[4]) с ребрами $(i, j) \in \Phi \times \Phi$.

Определение 1. Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли, если $\{(\sigma(x), \sigma(y))\}$ – ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V .

Обозначим множество всех допустимых G конфигураций через Ω^a , а через Ω_A – пространство конфигураций, определенных на множестве A .

Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $P_{i,j} > 0$, если $(i, j) \in G$; $P_{i,j} = 0$, если $(i, j) \notin G$ и $\sum_{j \in \Phi} P_{i,j} = 1$.

Условия согласованности:

Для G и P Гамильтониан НС-модели определяется следующим образом

$$H(\sigma) = \begin{cases} \sum_{\langle x, y \rangle} \log P_{\sigma(x), \sigma(y)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^a, \\ \infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^a. \end{cases} \quad (2)$$

Для $n=1, 2, \dots$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{\langle x, y \rangle \in V_n} P_{\sigma_n(x), \sigma_n(y)} \prod_{x \in W_n} t_{\sigma_n(x), x}, \quad (3)$$

где

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \prod_{\langle x, y \rangle \in V_n} P_{\bar{\sigma}_n(x), \bar{\sigma}_n(y)} \prod_{x \in W_n} t_{\bar{\sigma}_n(x), x}. \quad (4)$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 2$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (5)$$

Теорема 1.[4] Последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$, $n=1, 2, 3, \dots$ в (3) согласованная тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x_0\}$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{i,0} + P_{i,1}z_{1,y} + P_{i,2}z_{2,y} + P_{i,3}z_{3,y}}{P_{0,0} + P_{0,1}z_{1,y} + P_{0,2}z_{2,y} + P_{0,3}z_{3,y}}, \quad (6)$$

где $z_{i,x} = t_{i,x} / t_{0,x}$, $i=1, 2, 3$.

Известно (см [3]), что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k , представляющей собой свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Определение 2. Пусть $\tilde{G}$ – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $Z = \{z_x : x \in G_k\}$ называется $\tilde{G}$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для любых $x \in G_k$ и $y \in \tilde{G}$.

Определение 3. Мера Гиббса, соответствующая $\tilde{G}$ -периодической совокупности векторов, называется $\tilde{G}$ -периодической.

Для этого случая из (6) имеем

$$\begin{aligned} f_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\alpha + (1-\alpha)g_y}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \\ g_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\beta + (1-\beta)f_y}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \\ h_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, a, b, c, d \in (0,1)$.

Теорема 2. Если $k^2(\alpha - d)^2 > 1$, то существуют по меньшей мере три $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса.

ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. G. Brightwell, O. Haggstrom, P. Winkler. Nonmonotonic behavior in hard-core and Widom-Rowlinson models. Jour. Stat. Phys.,94:3-4 (1999), 415-435.
- [2]. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. 2013, 404 p.
- [3]. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. // De Gruyter stud. Math.,9, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.-525 p.
- [4]. Gandolfo D.,U.A.Rozikov.,J.Ruiz. On Four State Hard Core Models on the Cayley Tree. Markov Processes Relat. Fields 22,359-377 (2016).