

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Мадгозиев Г.Т.¹, Икромов М.², Турсунова Н.Ш.¹

¹Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

²студентка 4-курса, Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

E-mail: madgoziyevg@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, вероятность, НС-модель, мера Гиббса.

Keywords. Cayley tree, configuration, probability, НС-model, Gibbs measure.

Kalit so‘zlar. Keli daraxti, konfiguratsiya, ehtimollik, НС model, Gibbs o‘lchovi.

Annotasiya: Bu model uchun Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash masalasi funksional tenglamalar sistemasini echishga keltirilgan hamda translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari topilgan.

Аннотация: Задача описания гиббсовских мер рассматриваемой модели сведена к решению системы функциональных уравнений. Для этой модели найдены трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса.

Abstract: The task of describing Gibbs measures of the considered model is reduced to solving a system of functional equations. Translation-invariant and periodic Gibbs measures are found for this model.

Введение

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией Гиббсовских мер, можно найти, например в [2]. Общее определение понятия меры Гиббса первоначально было дано в научных работах Р. Л. Добрушина [9],[10]. Р. Л. Добрушин доказал теорему о существовании предельной меры Гиббса. Эта модель контурным методом изучена в работе [11], здесь мы преобразуем ее в НС (hard-core)-модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории (см, например, работы , [1],[2],[5],[6],[7]).

Определения и постановка задачи

Дерево Кэли $\Gamma^k(V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L –

множество ребер. Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существуют ребро $l \in L$ и соединяющие их, т.е. $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y), x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

$$L_n = \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

Будем писать $x \prec y$, если путь из x^0 до y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $x \prec y$, и x, y являются ближайшими соседями.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [7], т.е. $a_i^2 = e$, где e — единичный элемент.

Предложение 1. [7]. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k .

Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi = \{-1, 1\}$;

множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Мы рассмотрим НС-модель с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли с активностью $\lambda > 0$.

Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A . Через $|A|$ обозначим число элементов множества A .

Обобщенный символ Кронекера как функцию

$$U(\sigma_A) : \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min\{|A|, |\Phi|\}\},$$

определим следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \quad (1)$$

где $A \subset V$, и $|\sigma_A \cap \Phi|$ — число различных значений $\sigma_A(x), x \in A$. (см [1]).

В этой работе мы рассмотрим случай $|A|=4$. Обозначим через M множество всех шаров $b(x) = \{y \in V : d(x, y) \leq 1\}$ с радиусом 1.

Гамильтониан определяется следующим образом

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad (2)$$

где $J \in R$.

Основная проблема для данного гамильтониана— это описание всех отвечающих ему мер Гиббса. мы преобразуем ее в НС (hard-core)-модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории.

Условия согласованности:

Для $x \in V$ положим $x_{\downarrow} = \{y \in V : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ —множество "прямых потомков" точки $x \in V$.

Пусть $k = 2$. $b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}$ и $\sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}$.

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}} \right\}, \quad (3)$$

$$\text{где } \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \quad Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_{b(x)}} \right\}, \quad \text{и } h_{b, \sigma} \in R.$$

Говорят, что вероятностные распределения $\mu^{(n)}$, $(n \geq 1)$ согласованы, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (4)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V , такая, что

$$\mu \left(\left\{ \sigma|_{V_n} = \sigma_n \right\} \right) = \mu^{(n)}(\sigma_n), \quad \text{для всех } n \geq 1 \text{ и } \sigma_n \in \Omega_{V_n}.$$

Периодические меры Гиббса

Для $a \in M$, через b, c обозначим «прямые потомки» шара a (см [3]).

Рассмотрим конфигурации

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{+, +, +, +\}, \quad \sigma_1 = \{+, -, +, +\}, \quad \sigma_2 = \{+, +, -, -\}, \quad \sigma_3 = \{+, -, -, -\}, \\ -\sigma_0 &= \{-, -, -, -\}, \quad -\sigma_1 = \{-, -, -, +\}, \quad -\sigma_2 = \{-, -, +, +\}, \quad -\sigma_3 = \{-, +, +, +\} \end{aligned}$$

на единичном шаре.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на при которых выполняется (4).

Теорема 1[8]. Вероятностные распределения $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$ в (3) согласованы, если для любого $a \in M$ имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}} \\ y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,2} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \quad (5) \\ y_{a,3} &= \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,4} &= \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \end{aligned}$$

где $\lambda = \exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = \exp(h_{a,i} - h_{a,5})$, $i = \overline{0,4}$.

Предположим, что

$$y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1, \quad \forall a \in M. \quad (6)$$

Тогда из системы (5) получаем

$$\begin{cases} y_{a,0} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + 1}, \\ y_{a,1} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1}. \end{cases} \quad (7)$$

В этом разделе мы изучаем периодические меры Гиббса в случае выполнения условия (6).

Запишем систему (7) в следующем виде:

$$\begin{cases} h_{a,0} = \ln \left(\frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1} \cdot \frac{\lambda e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1}{e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1} \right), \\ h_{a,1} = \ln \frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}, \end{cases} \quad (8)$$

где $h_{a,i} = \ln y_{a,i}$, $i = 0,1$, и исследуем ее периодические решения.

Определение 1. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}) : a \in G_k\}$ называется H_0 -периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$ для любых $a \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 0,1$.

Определение 2. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической.

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

Пусть $h_{a,i} = \begin{cases} h_i, & \text{если } c_a \in G_2^{(2)}, \\ h'_i, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus G_2^{(2)}, \end{cases} \quad i = 0,1.$

Теорема 1. Для модели (2) при всех $\lambda > 0$ и выполнении условия (6) существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с ТИ мерой Гиббса.

Выводы

Для НС-модели при всех $\lambda > 0$ и при выполнении условия $y_{a,0} = y_{a,3}, y_{a,1} = y_{a,4}, y_{a,2} = 1, \forall a \in M$ существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса

Литература

- [1]. Bleher P.M., Ruiz J., Zagrebnov V.A. On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice // Journ. Stat. Phys. 1995, V. 79, -P. 473-482.
- [2]. Georgii.H.O. Gibbs measures and phase transitions. (de Gruyter studies in Math: Berlin), 1988.
- [3]. Rozikov U.A. A contour method on Cayley tree // J. Stat. Phys., 2008, V.130, No.2, p.801-813.
- [4]. Блехер П.М., Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете // Теория вероят. и ее примен., 1990. т. 35, вып. 2.-с. 920-930.

- [5]. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 109-117.
- [6]. Розиков. У. А Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118, №1, -с. 95-104.
- [7]. Розиков У.А., Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // Теор. и мат. физ, Москва. 2011. – Т.167. – №2. – С. 311–322.
- [8]. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. // Теор. вер. и ее примен. – 1970. –Т. 15. – № 3. – С. 469-497.
- [9]. Добрушин Р.Л. Задача единственности гиббсовских случайных полей и проблема фазовых переходов. // Функ. Анал. и его прилож. – 1968. – Т. 2. – №. 4. – С. 44-57.
- [10]. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, № 3 – С. 321-324.