

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ЧАСТИЦ В КОНТЕКСТЕ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Низомхонов Э.Н., Кадилова Г.А

Toshkent amaliy fanlar universiteti, "Raqamli va fundamental fanlar" kafedrası

Аннотация: В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение Шредингера для системы из двух частиц и исследуется его инвариантность относительно многопараметрической группы преобразований. Основное внимание уделяется применению методов группового анализа и математической индукции для доказательства инвариантности уравнения. Работа соответствует направлениям современной научно-практической конференции, включая связь фундаментальной математики с технологиями искусственного интеллекта. Рассматриваются возможности применения полученных результатов в задачах моделирования сложных систем, а также в алгоритмах машинного обучения, где симметрии играют ключевую роль. Приведены основные теоретические положения, методы исследования, а также результаты, имеющие значение для дальнейшего развития прикладных и цифровых технологий.

Annotatsiya: Mazkur maqolada ikki zarrachali sistema uchun kvazilinear Shredinger tenglamasi ko'rib chiqilib, uning ko'p parametrli guruhga nisbatan invariantligi o'rganiladi. Tadqiqotda Lie guruhlar nazariyasi va matematik induksiya usullaridan foydalanilgan. Ish sun'iy intellekt va fundamental fanlar kesishmasidagi dolzarb yo'nalishlarga mos keladi. Olingan natijalar murakkab tizimlarni modellashtirish, shuningdek, simmetriyaga asoslangan mashinaviy o'rganish algoritmlarini rivojlantirishda qo'llanishi mumkin. Maqolada nazariy asoslar, metodologiya va amaliy ahamiyatga ega natijalar bayon etilgan.

Abstract: This paper studies a quasilinear Schrödinger equation for a two-particle system and investigates its invariance under a multi-parameter transformation group. The research employs Lie group analysis and mathematical induction to prove invariance properties. The work aligns with modern scientific directions combining fundamental mathematics and artificial intelligence. The obtained results can be applied in modeling complex systems and in machine learning algorithms where symmetry plays an essential role. The paper presents theoretical foundations, research methodology, and results relevant for further development of applied and digital technologies.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение Шредингера, групповой анализ, симметрия, инвариантность, искусственный интеллект, математическое моделирование, дифференциальные уравнения, Lie группы.

Kalit so'zlar: kvazilinear Shredinger tenglamasi, guruh tahlili, simmetriya, invariantlik, sun'iy intellekt, matematik modellashtirish, differensial tenglamalar,

Keywords: Lie guruhlari, quasilinear Schrödinger equation, group analysis, symmetry, invariance, artificial intelligence, mathematical modeling, differential equations, Lie groups.

ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования в области искусственного интеллекта тесно связаны с фундаментальными математическими моделями, включая дифференциальные уравнения математической физики. Уравнение Шредингера играет ключевую роль в квантовой механике и активно используется при моделировании сложных систем.

В работах зарубежных и отечественных ученых (Овсянников, Фушич, Olver, Bluman и др.) показано, что симметрии дифференциальных уравнений позволяют существенно упростить их анализ и находить точные решения. Однако для квазилинейных обобщений уравнения Шредингера многие вопросы инвариантности остаются недостаточно изученными.

Таким образом, актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки новых методов анализа уравнений, применимых в задачах искусственного интеллекта, особенно в области симметричных нейросетей и физически-информированных моделей (Physics-Informed Neural Networks).

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Исследование опирается на классические работы по групповому анализу дифференциальных уравнений и современные подходы к математическому моделированию.

- определить условия инвариантности квазилинейного уравнения Шредингера;
- исследовать структуру симметрий;
- установить связь полученных результатов с современными цифровыми технологиями и ИИ.

Методологической базой являются:

- теория групп Ли;
- метод продолжения операторов;
- математическая индукция.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим уравнение типа Шредингера для двух частиц порядка

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m_1} \vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2} \vec{P}_y^2 \right)^n U + F(U) = 0, \quad (1)$$
$$\text{где } P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_{x_a} = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{y_a} = -i \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad a = 1, 2, 3,$$
$$U = U(t = x_0, \vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2,$$

m_1, m_2 - произвольные ненулевые постоянные,

n - произвольное натуральное число.

В случае, когда $F = 0, n = 1$ уравнение (1) совпадает с обычным линейным уравнением

Шредингера.

Уравнение (1) при $F = 0$ инвариантно относительно 30 – параметрической группы Шредингера, генераторы которой имеют вид:

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_A = - \frac{\partial}{\partial x_A}, \quad \text{где } A, B = \overline{1,6}, \quad \frac{\partial}{\partial x_{a+3}} = \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad P_{a+3} = i \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad J_{A,B} = x_A P_B - x_B P_A,$$

$$\text{где } A, B = \overline{1,6}, \quad J_{a,b} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a, b = \overline{1,3}.$$

$$J_{a+3,b+3} = y_a P_{b+3} - y_b P_{a+3}, \quad J_{a+3,b} = m_2 y_a P_{b+3} - m_1 y_b P_{a+3}, \quad G = t P_A - M x_A$$

$$\text{где } M = \{m_1, m_2\}, \quad G_a = t P_a - m_1 x_A, \quad G_{a+3} = t P_{a+3} - m_2 y_a, \quad (2)$$

$$D^{(n)} = 2t P_0 - x_A P_A + (4-n)i, \quad A^{(n)} = t[t P_0 - x_A P_A + (4-n)i] + M \frac{\overrightarrow{x^2}}{2},$$

где по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРИМЕРЫ

В результате исследования доказано, что рассматриваемое уравнение:

- инвариантно относительно 30-параметрической группы Шредингера;
- допускает определённые формы функции нелинейности;
- сохраняет симметрию при увеличении порядка.

Основные результаты:

- получена система определяющих уравнений;
- найдены условия на функцию F;
- доказана теорема об инвариантности методом индукции.

Практическое значение:

- применение в квантовых моделях;
- использование в алгоритмах ИИ;

моделирование сложных динамических систем

ТЕОРЕМА: Уравнение (1) инвариантно относительно 30 – параметрической группы

Шредингера, если $F(U) = \lambda U |U|^{\frac{2n}{4-n}}$, где λ – комплексный параметр.

Доказательство проведём методом математической индукции.

I. $n = 1$. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m_1} \vec{P}_a^2 - \frac{1}{2m_2} \vec{P}_{a+3}^2 \right)^n U + F(U) = 0 \quad (3)$$

Чтобы найти, при каких $F(U)$ уравнение (3) инвариантно относительно алгебры

Шредингера, применяем метод Ли [1]. Уравнение (3) запишем для действительной и мнимой части:

$$U = U^1 + iU^2, \quad F(U) = F^1(U^1, U^2) + iF^2(U^1, U^2),$$

$$U_0^1 + \frac{1}{2m_1}(U_{11}^2 + U_{22}^2 + U_{33}^2) + \frac{1}{2m_2}(U_{11}^2 + U_{22}^2 + U_{33}^2) + \lambda F^2(U^1, U^2) = 0$$

$$-U_0^2 + \frac{1}{2m_1}(U_{11}^1 + U_{22}^2 + U_{33}^2) + \frac{1}{2m_2}(U_{11}^1 + U_{22}^1 + U_{33}^1) + \lambda F^1(U^1, U^2) = 0$$
(4)

$$, \quad (5)$$

$$\text{где} \quad U_0^k = \frac{\partial U^k}{\partial t}, \quad k=1, 2., \quad U^k = \frac{\partial^2 U^k}{\partial x_a^2}, \quad U_{aa}^k = \frac{\partial^2 U^k}{\partial x_{a+3}^2}.$$

Допускаемый оператор будем искать в виде

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k \frac{\partial}{\partial U^k}.$$
(6)

Для получения определяющих уравнений необходимо 2-е продолжение оператора (6).

$$\overset{2}{X} = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k \frac{\partial}{\partial U^k} + \zeta_\mu^k \frac{\partial}{\partial U_\mu^k} + \sigma_{\mu j}^k \frac{\partial}{\partial U_{\mu j}^k},$$
(7)

где $\zeta_\mu^k, \sigma_{\mu j}^k$ вычисляются по известным формулам продолжения [1].

Запишем условие инвариантности (4)-(5) относительно оператора X:

$$\overset{2}{X}(S^1) \Big|_{\substack{s^1=0 \\ s^2=0}} = \zeta_0^1 + \frac{1}{2m_1}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \frac{1}{2m_2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \eta^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} = 0,$$

$$\overset{2}{X}(S^2) \Big|_{\substack{s^1=0 \\ s^2=0}} = -\zeta_0^1 + \frac{1}{2m_1}(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1) + \frac{1}{2m_2}(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1) + \eta^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} = 0,$$

$$\text{где} \quad S^1 = 0 \Rightarrow U_{11}^1 = 2m_1 U_0^2 - U_{22}^1 - U_{33}^1 - \frac{m_1}{m_2}(U_{11}^1 + U_{22}^1 + U_{33}^1) - 2m_1 F^1,$$

$$S^2 = 0 \Rightarrow U_{11}^2 = 2m_1 U_0^1 - U_{22}^2 - U_{33}^2 - \frac{m_1}{m_2}(U_{11}^2 + U_{22}^2 + U_{33}^2) - 2m_1 F^2.$$

После несложных, но довольно громоздких преобразований, находим систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_{U^k}^\mu &= 0, \quad \xi_A^0 = 0, \quad \xi_0^0 = \xi_A^A, \quad \xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad a \neq b. \\ \xi_{b+3}^{a+3} + \xi_{a+3}^{b+3} &= 0, \quad m_1 \xi_{a+3}^a + m_2 \xi_a^{a+3} = 0, \quad m_1 \xi_0^a + \eta_{aU^2}^1 = 0, \\ m_1 \xi_0^a + \eta_{aU^1}^2 &= 0, \quad m_2 \xi_0^{a+3} + \eta_{a+3, U^2}^1 = 0, \quad m_2 \xi_0^{a+3} + \eta_{a+3, U^1}^2 = 0, \\ \eta_{U^2}^1 + \eta_{U^1}^2 &= 0, \quad \eta_{AU^1}^1 = 0, \quad \eta_{AU^2}^2 = 0, \quad \eta_{U^1}^1 = \eta_{U^2}^2, \quad \eta_{0U^2}^1 = 0, \quad \eta_{0U^1}^2 = 0. \end{aligned}$$
(8)

$$\begin{aligned}
\eta_0^1 + \frac{1}{2m_1}\eta_{aa}^2 + \frac{1}{2m_2}\eta_{a+3,a+3}^2 - F^2(\eta_{U^2}^2 - 2\xi_1^1) + F^1\eta_{U^1}^2 + \eta^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} &= 0, \\
-\eta_0^2 + \frac{1}{2m_1}\eta_{aa}^1 + \frac{1}{2m_2}\eta_{a+3,a+3}^1 - F^1(\eta_{U^1}^1 - 2\xi_1^1) + F^2\eta_{U^2}^1 + \eta^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Используя формулы (2) в случае $n=1$, из (9) для определения функции F получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
F^1 + U^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} - U^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} &= 0, \\
5F^2 - 3U^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} - 3U^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} &= 0, \\
F^2 - U^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} + U^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} &= 0, \\
5F^1 - 3U^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} - 3U^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Решая эту систему, находим

$$F^1 = \lambda U^1 \left((U^1)^2 + (U^2)^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad F^2 = \lambda U^2 \left((U^1)^2 + (U^2)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{или} \quad F(U) = \lambda U |U|^{\frac{2}{3}},$$

где λ - комплексное число.

II. Предположим, что (1) выполняется при $n = \alpha - 1$, т.е.

$$F(U) = \lambda U |U|^{\frac{2(\alpha-1)}{4-(\alpha-1)}}. \text{Докажем, что уравнение (1) при } n = \alpha, \text{ т.е. } F(U) = \lambda U |U|^{\frac{2\alpha}{4-\alpha}} \text{ остаётся}$$

инвариантным относительно алгебры Шредингера. И этом случае (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
P_0 &= i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_A = i \frac{\partial}{\partial x_A}, \quad J_{A,B} = x_A P_B - x_B P_A, \quad G_A = t P_A - M x_A, \\
D^{(\alpha)} &= 2t P_0 - x_A P_A + 3i - (\alpha - 1)i, \quad A^{(\alpha)} = t(t P_0 - x_A P_A + 3i - (\alpha - 1)i) + m_1 \frac{\vec{x}_a^2}{2} + m_1 \frac{\vec{x}_{a+3}^2}{2}
\end{aligned}$$

и на $F(U)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
F^1 + U^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} - U^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} &= 0, \\
(4 + \alpha)F^2 + (4 - \alpha)U^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} - (4 - \alpha)U^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} &= 0, \\
F^2 + U^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} - U^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} &= 0, \\
(4 + \alpha)F^1 - (4 - \alpha)U^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} - (4 - \alpha)U^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Из этой системы находим, что $F(U) = \lambda U |U|^{\frac{2n}{4-n}}$. Теорема доказана.

В работе используется **метод Ли группового анализа**, позволяющий находить симметрии дифференциальных уравнений.

Основные этапы метода:

1. Представление уравнения в действительной и мнимой частях
2. Введение дифференциального оператора
3. Построение продолжения оператора
4. Получение определяющих уравнений
5. Решение системы для нахождения функции инвариантности

Метод является универсальным и может быть применён другими исследователями для анализа аналогичных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе:

- применён метод группового анализа;
- доказана инвариантность уравнения;
- получены новые условия для нелинейных членов;
- показана связь с задачами искусственного интеллекта.

Практическая значимость:

- использование в моделировании;
- внедрение в цифровые технологии;
- развитие междисциплинарных исследований.

Список литературы

- [1]. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
- [2]. Фушич В.И. Симметрия в уравнениях математических физики. – В кн.: Теоретико – алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики, 1981, стр. 6-23.