

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОВЫХ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛИ

Мадгозиев Г.Т., Бобожонова Б.Б., Кучкаров Ж.Д.

студенты, 4-курс

Tashkent University of Applied Sciences, Gavhar Str. 1, Tashkent 100149, Uzbekistan

E-mail: madgoziyevg@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса.

Keywords. Cayley tree, configuration, HC-model, Gibbs measure.

Kalit soʻzlar. Keli daraxti, konfiguratsiya, HC model, Gibbs oʻlchovi.

Аннотация: В этой работе для модели НС показано, что существует три слабо периодических мер Гиббса, соответствующих нормальному делителю индекса четыре в групповом представлении дерева Кэли.

Abstract: In this paper, for the HC model, it is shown that there exist three weakly periodic Gibbs measures corresponding to a normal divisor of index four in the group representation of the Cayley tree.

Annotasiya: Ushbu maqolada, HC modeli uchun, Keli daraxtining guruh tasvirida toʻrtinchi indeksning normal boʻluvchisiga mos keladigan uchta kuchsiz davriy Gibbs oʻlchovi mavjudligi koʻrsatilgan.

Пусть $\Gamma^k(V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Известно, что Γ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$.

Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых ближайших соседних $\langle x, y \rangle$ из V обозначим множество таких конфигураций через Ω . Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Гамильтониан НС-модели определяется следующим образом

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in \mathbb{R}.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом ([1]). Известно [2], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $Z = \{z_x : x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad \lambda = e^J > 0. \quad (1)$$

Пусть $G_k / \hat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор группа, $\hat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Совокупность величин $Z = \{z_x : x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ – периодической, если $z_x = z_i$ для $\forall x \in H_i$, т.е. значение функции z_x зависит только от класса принадлежности x . G_k – периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ рассмотрим $x_\downarrow = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ (см. [3]).

Определение 2. Совокупность величин $Z = \{z_x : x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ – периодической, если $z_x = z_{i,j}$ при всех $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ для $\forall x \in G_k$, т.е. значение функции z_x зависит только от классов принадлежности x и $x_\downarrow$.

Определение 3. Мера μ называется $\hat{G}_k$ – (слабо) периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ – (слабо) периодической совокупности величин Z .

В работах [4] и [5] были изучены слабо периодические меры Гиббса для НС-модели в случае нормального делителя индекса два, а в работе [6] для НС-модели доказано существование слабо периодических мер Гиббса с периодом четыре.

Пусть $A \subset \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$ и $H_A = \left\{x \in G_k : M = \sum_{i \in A} \varpi_x(a_i) - \text{четное число}\right\}$, где $\varpi_x(a_i)$ – число буквы a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}$ где $|x|$ – длина слова $x \in G_k$ и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ – нормальный делитель индекса 4.

Рассмотрим фактор-группу $G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$H_0 = \{x \in G_k : M - \text{четно}, |x| - \text{четно}\},$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{x \in G_k : M - \text{нечетно}, |x| - \text{четно}\}, \\
H_2 &= \{x \in G_k : M - \text{четно}, |x| - \text{нечетно}\}, \\
H_3 &= \{x \in G_k : M - \text{нечетно}, |x| - \text{нечетно}\}.
\end{aligned}$$

В силу (1), после некоторых преобразований, получим

$$\begin{cases}
z_1 = \frac{(1 + \lambda z_7)^k}{((1 + \lambda z_7)^{\frac{k}{i}} + \lambda z_8^{1-\frac{1}{i}})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{k-i}}, & z_2 = \frac{(1 + \lambda z_8)^k}{((1 + \lambda z_8)^{\frac{k}{i}} + \lambda z_7^{1-\frac{1}{i}})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}} \\
z_7 = \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{((1 + \lambda z_1)^{\frac{k}{i}} + \lambda z_2^{1-\frac{1}{i}})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_8)^{k-i}}, & z_8 = \frac{(1 + \lambda z_2)^k}{((1 + \lambda z_2)^{\frac{k}{i}} + \lambda z_1^{1-\frac{1}{i}})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_7)^{k-i}}
\end{cases} \quad (2)$$

где $i = |A|$ – мощность множества A .

Рассмотрим отображение $W : R^4 \rightarrow R^4$. Заметим, что (2) есть уравнение $z = W(z)$.

Чтобы решить систему уравнений (2), надо найти неподвижные точки отображения $z' = W(z)$.

Из работы [6] известны:

Лемма 1. [6] *Отображения W имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\}, \\
I_2 &= \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7, \quad z_2 = z_8\}, \\
I_3 &= \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, \quad z_7 = z_8\}, \\
I_4 &= \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8, \quad z_2 = z_7\}.
\end{aligned}$$

Теорема 1. [6] *Если существуют слабо периодические меры Гиббса, соответствующие совокупности величин из I_1, I_2, I_3, I_4 , то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения:*

1. Пусть $k = 2, i = 2, \lambda_{cr} = 4$. Тогда для слабо периодических мер Гиббса на I_2 при $\lambda < \lambda_{cr}$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной; при $\lambda = \lambda_{cr}$ существуют две слабо периодическая мера Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другая слабо периодической (не

периодической); $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют три слабо периодические меры Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другие две слабо периодическими (не периодическими).

2. При $k=2$, $i=2$ на I_3 и I_4 , соответственно, слабо периодическая мера Гиббса единственна.

Литературы

- [1] Георги Х. О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. «Мир» 1992. 624с.
- [2] Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an exsemple of a loss network. Queueing Systems, 2004, 46 с. 197-212.
- [3] Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли. ТМФ, 2008, 156: 2, с. 292-302.
- [4] Розиков У.А., Хакимов Р.М. Условие единственности слабо периодической меры для модели жесткой сердцевины. ТМФ, 2012, 173: 1, с. 60-70.
- [5] Хакимов Р.М. Единственность слабо периодической гиббсовской меры для НС-модели. Математические заметки. 2013, т. 94, №5, с. 796-800.
- [6] Хакимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса четыре. Украинский математический журнал. 2015, т. 67, №10, с.1409-1422.