

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА С ПЕРИОДОМ ДВА ДЛЯ НС-МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Мадгозиев Ганижон Турдибаевич¹, Юлдашев Санжарбек Атабекович²

¹к.ф.-м.н., доцент- Ташкентский университет прикладных наук.
²старший преподаватель – Ташкентский университет прикладных наук.
¹e-mail: madgoziyevg@gmail.com, ²e-mail: sanjaryuldashev1968@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, вероятность, НС-модель, мера Гиббса.

Аннотация: Мы рассматриваем жесткие модели с четырьмя состояниями ближайшего соседа (НС) на однородном дереве Кэли. При выполнении некоторых условий для параметров модели мы доказываем существование нескольких периодических мер Гиббса.

Введение.

Информацию о НС-моделях можно найти в работах [1] и [2].

Общее определение понятия меры Гиббса первоначально было дано в научных работах Р. Л. Добрушина [9],[10]. Р. Л. Добрушин доказал теорему о существовании предельной меры Гиббса. Впервые эта теорема была использована К. Х. Хининым для решетчатых моделей в квантовой теории поля. Целью настоящей главы является изучение меры Гиббса для модели (2). Эта модель контурным методом изучена в работе [11], здесь мы преобразуем ее в НС (hard-core)-модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории (см, например, работы , [1],[2],[4],[5],[6],[7]).

Определения и постановка задачи

Дерево Кэли $\Gamma^k(V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер.

Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существуют ребро $l \in L$ и соединяющие их, т.е. $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве определяется формулой

$$d(x, y) = \min \{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \},$$

где $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – ближайшие соседи.

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

Будем писать $x \prec y$, если путь из x^0 до y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $x \prec y$, и x, y являются ближайшими соседями.

Для $x \in W_n$ введем обозначение $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Множество $S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x . Если $S(x)$ – совокупность «прямых потомков» вершины x , то для любой вершины $x \in V$, отличной от x^0 , имеем $|S(x)| = k$ и $|S(x^0)| = k + 1$.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [7], т.е. $a_i^2 = e$, где e – единичный элемент.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$.

Конфигурация на дереве Кэли задается $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\} \in \Phi^V$.

Рассмотрим граф G (см.[4]) с ребрами $(i, j) \in \Phi \times \Phi$.

Определение 1. Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли, если $\{(\sigma(x), \sigma(y))\}$ – ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V .

Обозначим множество всех допустимых G конфигураций через Ω^a , а через Ω_A – пространство конфигураций, определенных на множестве A .

Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $P_{i,j} > 0$, если $(i, j) \in G$; $P_{i,j} = 0$, если $(i, j) \notin G$ и $\sum_{j \in \Phi} P_{i,j} = 1$.

Для G и P Гамильтониан НС-модели определяется следующим образом

$$H(\sigma) = \begin{cases} \sum_{\langle x, y \rangle} \log P_{\sigma(x), \sigma(y)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^a, \\ \infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^a. \end{cases} \quad (2)$$

Для $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{\langle x, y \rangle \in V_n} P_{\sigma_n(x), \sigma_n(y)} \prod_{x \in W_n} t_{\sigma_n(x), x}, \quad (3)$$

где

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \prod_{\langle x, y \rangle \in V_n} P_{\bar{\sigma}_n(x), \bar{\sigma}_n(y)} \prod_{x \in W_n} t_{\bar{\sigma}_n(x), x}. \quad (4)$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 2$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (5)$$

Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему мер Гиббса.

Условия согласованности:

Теорема 1.[4] Последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ в (3) согласованная тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x_0\}$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{i,0} + P_{i,1}z_{1,y} + P_{i,2}z_{2,y} + P_{i,3}z_{3,y}}{P_{0,0} + P_{0,1}z_{1,y} + P_{0,2}z_{2,y} + P_{0,3}z_{3,y}}, \quad (6)$$

где $z_{i,x} = t_{i,x} / t_{0,x}$, $i = 1, 2, 3$.

Известно (см [3]), что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k , представляющей собой свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Периодические меры Гиббса

Определение 2. Пусть $\tilde{G}$ – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $z = \{z_x : x \in G_k\}$ называется $\tilde{G}$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для любых $x \in G_k$ и $y \in \tilde{G}$.

Определение 3. Мера Гиббса, соответствующая $\tilde{G}$ - периодической совокупности векторов, называется $\tilde{G}$ -периодической.

Для этого случая из (6) имеем

$$\begin{aligned} f_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\alpha + (1-\alpha)g_y}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \\ g_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\beta + (1-\beta)f_y}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \\ h_x &= \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{af_y + bg_y + ch_y + d}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, a, b, c, d \in (0,1)$.

Теорема 2. Если $k^2(\alpha - d)^2 > 1$, то существуют по меньшей мере три $G_k^{(2)}$ - периодические меры Гиббса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleher P.M., Ruiz J., Zagrebnov V.A. On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice // Journ. Stat. Phys. 1995, V. 79, -P. 473-482.
2. Georgii.H.O. Gibbs measures and phase transitions. (de Gruyter studies in Math: Berlin), 1988.
3. Rozikov U.A. A contour method on Cayley tree // J. Stat. Phys., 2008, V.130, No.2, p.801-813.
4. Rozikov U.A. Constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree.// Jour. Stat. Phys. 2006. V. 122, No. 2, p. 217-235.
5. Блехер П.М., Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете // Теория вероят. и ее примен., 1990. т. 35, вып. 2.-с. 920-930.
6. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 109-117.
7. Розиков. У. А Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118, №1, -с. 95-104.



8. Розиков У.А., Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // Теор. и мат. физ, Москва. 2011. – Т.167. – №2. – С. 311–322.
9. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. // Теор. вер. и ее примен. – 1970. –Т. 15. – № 3. – С. 469-497.
10. Добрушин Р.Л. Задача единственности гиббсовских случайных полей и проблема фазовых переходов. // Функ. Анал. и его прилож. – 1968. – Т. 2. – №. 4. – С. 44-57.
11. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, № 3 – С. 321-324.