

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ГИББСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Мадгозиев Ганижон Турдибаевич¹, Юлдашев Санжарбек Атабекович²

¹к.ф.-м.н., доцент- Ташкентский университет прикладных наук.

²старший преподаватель – Ташкентский университет прикладных наук.

¹e-mail: madgoziyevg@gmail.com, ²e-mail: sanjaryuldashev1968@gmail.com

Ключевые слова. дерево Кэли, конфигурация, вероятность, НС-модель, мера Гиббса.

Аннотация: Задача описания гиббсовских мер рассматриваемой модели сведена к решению системы функциональных уравнений. Для этой модели найдены трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса.

Введение.

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией Гиббсовских мер, можно найти, например в [2]. Общее определение понятия меры Гиббса первоначально было дано в научных работах Р. Л. Добрушина [9],[10]. Р. Л. Добрушин доказал теорему о существовании предельной меры Гиббса. Впервые эта теорема была использована К. Х. Хининым для решетчатых моделей в квантовой теории поля. Целью настоящей главы является изучение меры Гиббса для модели (2). Эта модель контурным методом изучена в работе [11], здесь мы преобразуем ее в НС (hard-core)-модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории (см, например, работы , [1],[2],[4],[5],[6],[7]).

Определения и постановка задачи

Дерево Кэли $\Gamma^k(V, L)$ (или решетка Бете, в другой терминологии, см. по поводу терминологии работу [4]) порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер. Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существуют ребро $l \in L$ и соединяющие их, т.е. $l = \langle x, y \rangle$.

Если для вершин x и y существуют вершины $x_1, x_2, \dots, x_d$ такие, что $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_d, y \rangle$, тогда $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_d, y \rangle$ есть путь, соединяющий x и y .

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

$$L_n = \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

Будем писать $x \prec y$, если путь из x^0 до y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $x \prec y$, и x, y являются ближайшими соседями.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [7], т.е. $a_i^2 = e$, где e – единичный элемент.

Предложение 1. [7]. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k .

Это соответствие строится так, как показано в рис 1.1.1.

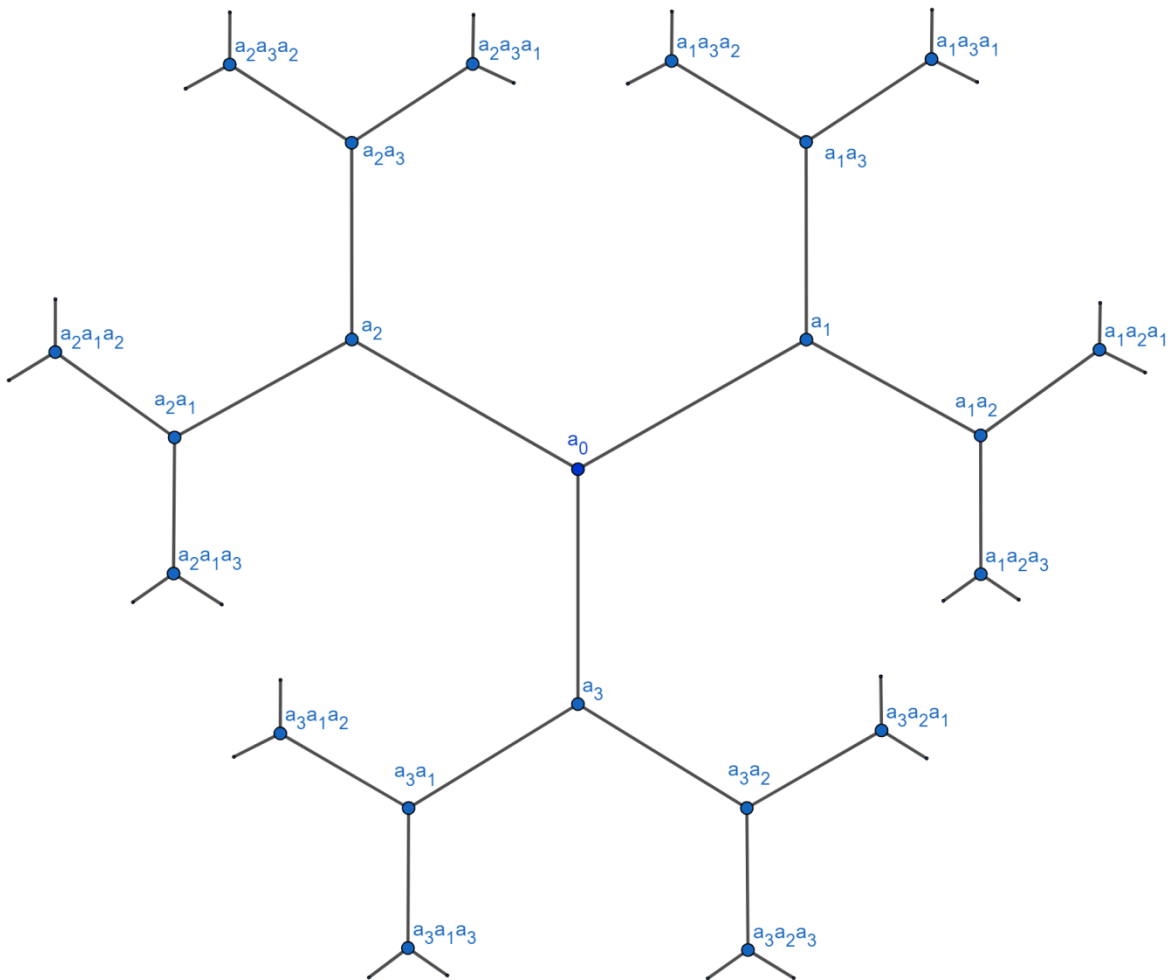


Рис. 1. Вид Γ^2 .

Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi = \{-1, 1\}$;

множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Мы рассмотрим НС-модель с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли с активностью $\lambda > 0$.

Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A . Через $|A|$ обозначим число элементов множества A .

Обобщенный символ Кронекера как функцию

$$U(\sigma_A): \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min\{|A|, |\Phi|\}\},$$

определим следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \quad (1)$$

где $A \subset V$, и $|\sigma_A \cap \Phi|$ – число различных значений $\sigma_A(x)$, $x \in A$. (см [1]).

В этой работе мы рассмотрим случай $|A| = 4$. Обозначим через M множество всех шаров $b(x) = \{y \in V : d(x, y) \leq 1\}$ с радиусом 1.

Гамильтониан определяется следующим образом

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad (2)$$

где $J \in R$.

Основная проблема для данного гамильтониана — это описание всех отвечающих ему мер Гиббса. мы преобразуем ее в НС (hard-core)-модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории.

Условия согласованности:

Зафиксируем $x^0 \in V$ и обозначим. Для $x \in V$ положим $x_{\downarrow} = \{y \in V : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ — множество "прямых потомков" точки $x \in V$.

Мы рассмотрим случай $k = 2$.

Пусть $b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}$ и $\sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}$.

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}} \right\}, \quad (3)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$, $Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_{b(x)}} \right\}$, и $h_{b, \sigma} \in R$.

Говорят, что вероятностные распределения $\mu^{(n)}$, $(n \geq 1)$ согласованы, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (4)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V , такая, что $\mu\left(\left\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\right\}\right) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$, для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Периодические меры Гиббса

Для $a \in M$, через b, c обозначим «прямые потомки» шара a (см [3]).

Рассмотрим конфигурации

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{+, +, +, +\}, \sigma_1 = \{+, -, +, +\}, \sigma_2 = \{+, +, -, -\}, \sigma_3 = \{+, -, -, -\}, \\ -\sigma_0 &= \{-, -, -, -\}, -\sigma_1 = \{-, -, -, +\}, -\sigma_2 = \{-, -, +, +\}, -\sigma_3 = \{-, +, +, +\} \end{aligned}$$

на единичном шаре.

Обозначим

$$h_{b, \sigma_0}^{\sigma_0} = h_{b, 0}, h_{b, \sigma_1}^{\sigma_0} = h_{b, 1}, h_{b, \sigma_2}^{\sigma_0} = h_{b, 2}, h_{b, -\sigma_1}^{\sigma_1} = h_{b, 3}, h_{b, -\sigma_2}^{\sigma_1} = h_{b, 4}, h_{b, -\sigma_3}^{\sigma_1} = h_{b, 5},$$

$$h_{b, \sigma_1}^{-\sigma_1} = h_{b, 6}, h_{b, \sigma_2}^{-\sigma_1} = h_{b, 7}, h_{b, \sigma_3}^{-\sigma_1} = h_{b, 8}, h_{b, -\sigma_0}^{-\sigma_0} = h_{b, 9}, h_{b, -\sigma_1}^{-\sigma_0} = h_{b, 10}, h_{b, -\sigma_2}^{-\sigma_0} = h_{b, 11}.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на при которых выполняется (4).

Теорема 1[8]. Вероятностные распределения $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n=1,2,\dots$ в (3)

согласованы, если для любого $a \in M$ имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}} \\ y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,2} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,3} &= \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,4} &= \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda = \exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = \exp(h_{a,i} - h_{a,5})$, $i = 0, 4$.

Предположим, что

$$y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1, \quad \forall a \in M. \quad (6)$$

Тогда из системы (5) получаем

$$\begin{cases} y_{a,0} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + 1}, \\ y_{a,1} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1}. \end{cases} \quad (7)$$

В этом разделе мы рассматриваем периодические меры Гиббса в случае выполнения условия (6).

Запишем систему (7) в следующем виде:

$$\begin{cases} h_{a,0} = \ln \left(\frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1} \cdot \frac{\lambda e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1}{e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1} \right), \\ h_{a,1} = \ln \frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}, \end{cases} \quad (8)$$

где $h_{a,i} = \ln y_{a,i}$, $i = 0, 1$, и исследуем ее периодические решения.

Определение 1. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}) : a \in G_k\}$ называется H_0 -периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$ для любых $a \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 0, 1$.

Определение 2. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической.

Определим $F : h = (h_0, h_1) \rightarrow F(h) \in R$ следующим образом

$$F(h) = \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}.$$

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

Пусть $h_{a,i} = \begin{cases} h_i, & \text{если } c_a \in G_2^{(2)}, \\ h'_i, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus G_2^{(2)}, \end{cases} \quad i = 0, 1.$

Теорема 1. Для модели (2) при всех $\lambda > 0$ и выполнении условия (6) существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с ТИ мерой Гиббса.

Выводы

Для НС-модели при всех $\lambda > 0$ и при выполнении условия $y_{a,0} = y_{a,3}, y_{a,1} = y_{a,4}, y_{a,2} = 1, \forall a \in M$ существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleher P.M., Ruiz J., Zagrebnov V.A. On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice // Journ. Stat. Phys. 1995, V. 79, -P. 473-482.
2. Georgii.H.O. Gibbs measures and phase transitions. (de Gruyter studies in Math: Berlin), 1988.
3. Rozikov U.A. A contour method on Cayley tree // J. Stat. Phys., 2008, V.130, No.2, p.801-813.
4. Rozikov U.A. Constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree.// Jour. Stat. Phys. 2006. V. 122, No. 2, p. 217-235.
5. Блехер П.М., Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете // Теория вероят. и ее примен., 1990. т. 35, вып. 2.-с. 920-930.
6. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 109-117.
7. Розиков. У. А Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118, №1, -с. 95-104.
8. Розиков У.А., Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // Теор. и мат. физ, Москва. 2011. – Т.167. – №2. – С. 311–322.
9. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. // Теор. вер. и ее примен. – 1970. –Т. 15. – № 3. – С. 469-497.
10. Добрушин Р.Л. Задача единственности гиббсовских случайных полей и проблема фазовых переходов. // Функ. Анал. и его прилож. – 1968. – Т. 2. – №. 4. – С. 44-57.
11. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, № 3 – С. 321-324.