

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ 3D-ОБЪЕКТОВ В AUTOCAD НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ

Нуралиев Фахриддин Муродиллаевич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой Телевизионных и Медиа Технологий,
Ташкентский университет информационных технологий
имени Мухаммада ал-Хоразмий, 100084,
Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108,
Тел.: +998 90 317 11 88,
Эл. почта: f.nuraliev@tuit.uz

Иноятлов Мирзаёр Бахтиёр угли
ассистент, кафедра Телевизионных и Медиа Технологий,
Ташкентский университет информационных технологий
имени Мухаммада ал-Хоразмий, 100084,
Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108,
Тел.: +998 99 841 08 10,
Эл. почта: mirzayorinoyatov1997@gmail.com

Аннотация: В статье представлена методология геометрического моделирования сложных трёхмерных объектов на основе теории R-функций В.Л. Рвачёва. Простые аналитические примитивы — эллипсоид, сфера, суперэллипсоид, тор — описываются неявными функциями вида $f(x, y, z) \geq 0$, над которыми выполняются R-операции: Rα-параметрическая конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Для полигонизации полученной неявной поверхности применяется алгоритм Dual Contouring, который на основе данных Эрмита и минимизации квадратичной функции ошибки (QEF) обеспечивает сохранение острых геометрических особенностей. Метод апробирован на сложных моделях: фланцевый диск (20 функций) и автомобиль (31 функция).

Ключевые слова: R-функции, неявное моделирование, Dual Contouring, QEF, R-операции, геометрическое моделирование, конструктивная геометрия.

Введение

В современном инженерном проектировании всё возрастающую роль играют системы геометрического моделирования с использованием средств компьютерной автоматизации (CAD). При создании сложных трёхмерных объектов традиционно широко применяется метод конструктивной геометрии твёрдых тел (CSG — Constructive Solid Geometry) [1, 2]. В этом методе сложная форма строится путём последовательного применения логических операций (UNION, SUBTRACT, INTERSECT) над простыми примитивами. Однако необходимость выполнения каждой операции в отдельности, отсутствие возможности визуализации промежуточных результатов, а также требование повторения всех этапов построения при изменении параметров существенно снижают эффективность проектирования.

Одним из эффективных подходов к преодолению указанных ограничений является моделирование на основе неявных функций (например, $f(x, y, z) = 0$). В рамках данного подхода геометрический объект описывается соотношением $f(x, y, z) \geq 0$, при этом $f = 0$ задаёт поверхность, $f > 0$ — внутреннюю область объекта, а $f < 0$ — внешнюю

область [3, 4, 5]. Математической основой неявного моделирования служит теория R-функций, предложенная академиком В.Л. Рвачёвым в 1963 году [6, 7]. R-функции представляют собой аналитические аналоги логических операций и позволяют описывать геометрические области непрерывными дифференцируемыми функциями [8, 9].

Для визуализации неявной поверхности необходимо её преобразование в полигональную сетку. В этой области наиболее широко известен алгоритм Marching Cubes (MC), предложенный Лоренсеном и Клайном [10], однако он не обеспечивает сохранения острых рёбер. Алгоритм Dual Contouring (DC), предложенный Ju и соавторами [11], за счёт использования данных Эрмита и минимизации QEF [12] позволяет сохранять острые геометрические особенности. Целью настоящего исследования является разработка методологии, объединяющей метод R-функций (RFM) и алгоритм Dual Contouring, и её апробация на примерах сложных трёхмерных моделей.

Математический аппарат R-функций

Неявные примитивы

В подходе R-функций каждый трёхмерный (3D) геометрический примитив представляется функцией $f(x, y, z)$. Неявные функции для основных 3D-примитивов определяются следующим образом [5, 8]:

— Эллипсоид: a_e, b_e, c_e — полуоси

$$f_{\text{ellipsoid}}(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} + \frac{z^2}{c_e^2} - 1 \geq 0 \quad (1)$$

— Сфера: центр (x_0, y_0, z_0) , r — радиус

$$f_{\text{sphere}}(x, y, z) \equiv r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 \geq 0 \quad (2)$$

— Суперэллипсоид: центр (x_0, y_0, z_0) , a_s, b_s, c_s — ширины сторон суперэллипсоида. При $n = 1$ получается гексаэдр, при $n = 2, 3, 4 \dots$ — параллелепипед со скруглёнными рёбрами

$$f_{\text{superellipsoid}}(x, y, z) \equiv 1 - \left| \frac{x - x_0}{a_s} \right|^n - \left| \frac{y - y_0}{b_s} \right|^n - \left| \frac{z - z_0}{c_s} \right|^n \geq 0 \quad (3)$$

— Тор: R_t — большой радиус, r_t — малый радиус

$$f_{\text{torus}}(x, y, z) \equiv r_t^2 - \left(\sqrt{(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2} - R_t \right)^2 - (z - c_z)^2 \geq 0 \quad (4)$$

Для каждого примитива на его поверхности выполняется равенство $f = 0$, внутри — $f > 0$, а снаружи — $f < 0$. Это свойство обеспечивает корректность выполнения R-операций, поскольку R-функции основаны на знаках своих аргументов [6, 7].

R α -параметрические R-операции

Сложные трёхмерные объекты строятся как логическая композиция простых примитивов с помощью R-операций. В R α -параметрической системе, введённой Рвачёвым [6, 7], определены три основные операции:

R α -конъюнкция ($\wedge$):

$$f_1 \wedge_{\alpha} f_2 \equiv 1/(1 + \alpha) \cdot [f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha \cdot f_1 \cdot f_2}] \quad (5)$$

R α -дизъюнкция ($\vee$):

$$f_1 \vee_{\alpha} f_2 \equiv 1/(1 + \alpha) \cdot [f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha \cdot f_1 \cdot f_2}] \quad (6)$$

Отрицание ($\neg$):

$$\bar{f} \equiv -f \quad (7)$$

В системе R₁ операции конъюнкции и дизъюнкции имеют вид:

$$\min(f_1, f_2) \equiv f_1 \wedge_1 f_2 \equiv \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|) \quad (8)$$

$$\max(f_1, f_2) \equiv f_1 \vee_1 f_2 \equiv \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|) \quad (9)$$

В системе R₀ операции конъюнкции и дизъюнкции имеют вид:

$$f_1 \wedge_0 f_2 \equiv f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (10)$$

$$f_1 \vee_0 f_2 \equiv f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (11)$$

Здесь параметр $-1 < \alpha \leq 1$ регулирует степень гладкости поверхности [5, 8]. При $\alpha = 0$ получаем систему R₀, обеспечивающую гладкий переход (C¹-непрерывность) в местах соединения двух поверхностей. При $\alpha = 1$ система R₁ эквивалентна функциям min/max и сохраняет острые рёбра. Отрицание во всех системах имеет одинаковый вид.

Композиция сложных объектов

Важнейшим свойством R-операций является возможность их последовательного применения для создания объектов произвольной сложности. Например, при моделировании автомобиля к корпусу присоединяются колёса и фары, а затем с помощью операции отрицания из основного корпуса удаляются салон и задний багажник, и так далее. Итоговая функция $F(x, y, z)$ представляет собой единое неявное поле, полученное в результате композиции всех примитивов и R-операций, и в каждой точке пространства принимает положительное значение (внутри объекта) либо отрицательное (снаружи). Pasko и соавторы [3] назвали этот подход функциональным представлением (FRep) и формализовали операции теории множеств, смешивания и смещения. Ricci [4] первым предложил выполнять операции конструктивной геометрии над неявными функциями.

Построение поверхности: алгоритм Dual Contouring

Для преобразования неявной поверхности $F(x, y, z) = 0$, определённой на основе R-функций, в полигональную сетку в настоящем исследовании использован алгоритм Dual Contouring (DC), предложенный Ju и соавторами [11]. Основное отличие алгоритма DC от классического Marching Cubes (MC) [10] состоит в том, что в MC вершины располагаются на рёбрах сетки (что приводит к потере острых особенностей), тогда как в DC вершины размещаются внутри ячейки в оптимальном положении на основе минимизации QEF [12]. Это обеспечивает более высокое качество восстановления острых геометрических особенностей [11, 13].

Этапы работы алгоритма DC следующие:

Этап 1. В пределах заданных границ сетки строится пространственная сетка из $N \times N \times N$ ячеек. В 8 вершинах каждой ячейки вычисляется значение $F(x, y, z)$.

Этап 2. Определяются рёбра со сменой знака: если в вершинах ячейки знак F изменяется, то поверхность пересекает данную ячейку.

Этап 3. На каждом ребре со сменой знака методом бисекции (12 итераций) находится точная точка пересечения p_i . В этой точке вычисляется численный градиент и нормализуется: $n_i = \nabla F / |\nabla F|$.

Этап 4. Для каждой ячейки строится и минимизируется QEF [11, 12]:

$$E[x] = \sum_i (n_i \cdot (x - p_i))^2 \rightarrow \min \quad (12)$$

Задача сводится к системе линейных уравнений $Ax = b$, в которой строки матрицы A — нормали n_i , а вектор b — скалярные произведения $n_i \cdot p_i$. Решение получается по формуле Крамера, а при недостатке ранга применяется метод mass point [11]. Математической основой данного подхода служат квадратичные метрики ошибки Гарленда и Хекберта [12].

Этап 5. Для каждого ребра со сменой знака из дуальных вершин четырёх соседних ячеек формируется четырёхугольная (quad) грань [11].

Основное преимущество алгоритма DC состоит в том, что в результате минимизации QEF дуальные вершины размещаются в позициях, оптимально соответствующих особенностям поверхности. Это обеспечивает значительно более качественное сохранение острых рёбер и углов по сравнению с алгоритмом MC [11, 13, 14]. Schaefer и соавторы [14] обеспечили построение в алгоритме DC многообразных (водонепроницаемых) сеток. В обширном обзоре De Araújo и соавторов [15] алгоритм DC оценивается как один из наиболее эффективных методов полигонизации неявных поверхностей.

Результаты экспериментов

Тестовые модели

Для оценки эффективности предлагаемого метода были созданы две модели различной сложности. Первая модель — автомобиль (типа Pickup), итоговое R-функциональное выражение которого объединяет 31 примитивную (неявную) функцию посредством R-операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Вторая модель — фланцевый диск — состоит из 20 примитивных функций.

Сравнение с традиционным методом CSG

Для сравнения подхода на основе R-функций с традиционным CSG [1, 2] был проведён эксперимент по созданию одной и той же модели автомобиля (Pickup) обоими методами. В традиционном методе в AutoCAD требуется сначала создать каждый примитив отдельной командой (Box, Cylinder, Sphere), а затем последовательно выполнить операции UNION/SUBTRACT/INTERSECT. В методе R-функций же все примитивы и их композиция описываются единым математическим выражением. Наиболее важное различие касается изменения параметров: в методе R-функций достаточно изменить одно число в формуле, тогда как при использовании CSG требуется полное повторение всего процесса построения. Ниже приведены изображения интерфейса AutoCAD после подключения плагина RFM с использованием команды «NETLOAD», а также визуализации геометрических моделей автомобиля и фланцевого диска, построенных в среде AutoCAD с применением данного плагина:

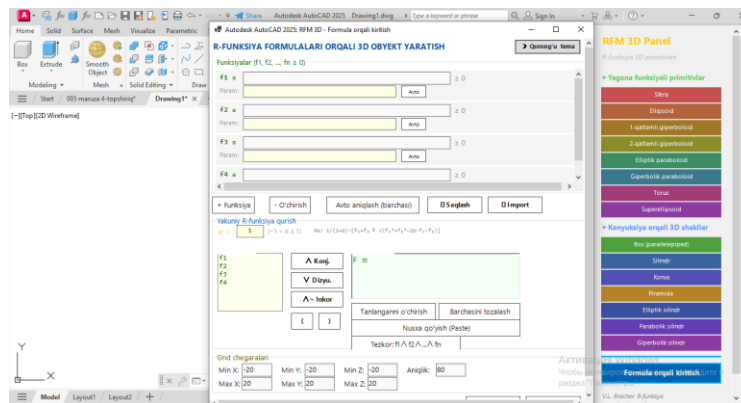


Рис. 1. Интерфейс AutoCAD после подключения плагина RFM с помощью команды «NETLOAD»

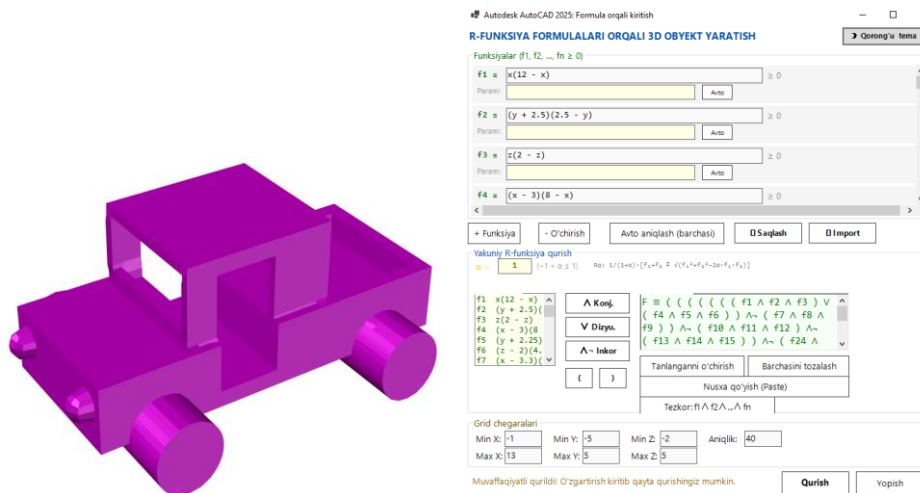


Рис. 2. 3D-модель автомобиля, построенная на основе R-функций: геометрическая модель автомобиля (слева); ввод 31 примитивной функции автомобиля в окно плагина (справа)

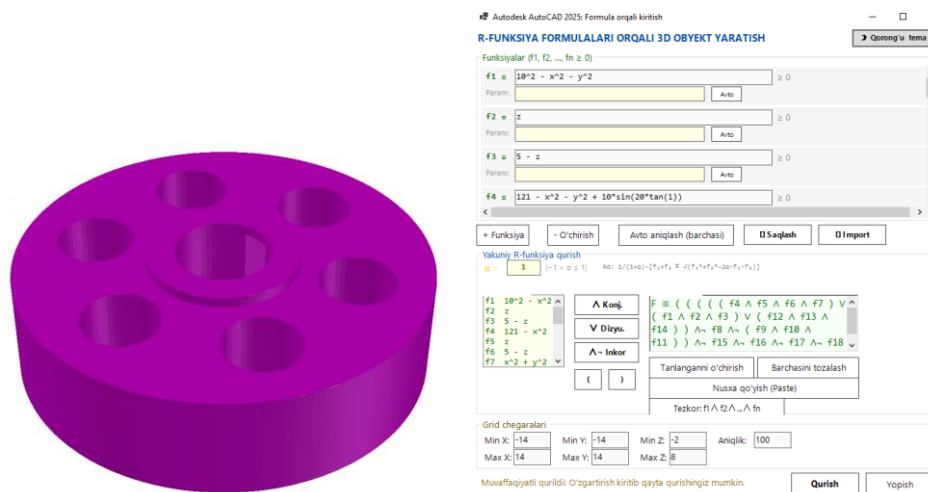


Рис. 3. 3D-модель фланцевого диска, построенная на основе R-функций: геометрическая модель фланцевого диска (слева); ввод 20 примитивных функций фланца в окно плагина (справа)

Разрешение сетки и время вычислений

Все эксперименты проводились в следующей технической среде: процессор — Intel Core i7-8700 (6 ядер, 12 потоков, 3,2 ГГц); оперативная память — 32 ГБ DDR4; видеокарта — NVIDIA GeForce RTX 2060 6 ГБ; программное обеспечение — AutoCAD 2025, операционная система Windows 10; плагин — RFM Plugin, разработанный на базе .NET Framework.

В приведённых ниже двух таблицах представлены результаты экспериментов для моделей автомобиля и фланцевого диска при различных значениях разрешения сетки (resolution).

Таблица 1.

Результаты для модели автомобиля (31 примитивная функция)

№	Разрешение	Время (с)	Число полигонов	Границы сетки
1	50	12	9 732	14 × 10 × 7
2	100	49	38 634	
3	150	100	85 706	

Таблица 2.

Результаты для модели фланцевого диска (20 примитивных функций)

№	Разрешение	Время (с)	Число полигонов	Границы сетки
1	50	8	11 810	28 × 28 × 10
2	100	32	46 252	
3	150	70	104 188	

Из обеих таблиц видно, что с увеличением разрешения N число полигонов и время вычислений существенно возрастают. При увеличении N с 50 до 150 (в 3 раза) число полигонов увеличивается примерно в 8 раз, а время — также приблизительно в 8 раз. Это соответствует вычислительной сложности алгоритма DC порядка $O(N^3)$, то есть $2^3 = 8$ [11].

Обсуждение

Полученные результаты подтверждают эффективность теории R-функций в геометрическом моделировании сложных трёхмерных объектов. Во-первых, неявный подход позволяет строить сложные формы из простых примитивов в виде единого математического выражения. Это соответствует концепции полуаналитической геометрии Shapiro [5, 8] — геометрический объект полностью описывается аналитически, тогда как построение поверхности выполняется с помощью численного алгоритма (DC).

Во-вторых, преимущество алгоритма DC перед MC [10] проявляется в сохранении острых особенностей. Как показано Kobbelt и соавторами [13], в MC вершины ограничены рёбрами сетки, тогда как в DC они размещаются оптимально на основе QEF. В недавних исследованиях Shen и соавторы [16] в методе FlexiCubes предложили расширение DC для оптимизации градиента. Hwang и Sung [17] адаптировали алгоритм DC для нейронных неявных представлений. Ramaijane и соавторы [18] изучили влияние различных структур

данных (octree и k-d tree) на эффективность DC и показали, что применение k-d tree позволяет сократить время построения примерно на 40%.

Тем не менее, метод имеет ряд ограничений. Моделирование с помощью R-функций требует математических знаний — пользователь должен знать аналитическую формулу для каждого примитива. При Resolution=150 время вычислений достигает 2 минут, что затрудняет интерактивное моделирование. В дальнейшем эти ограничения могут быть преодолены за счёт применения параллельных вычислений на GPU [17] и адаптивного Octree [14, 18].

Заключение

В настоящей работе разработана и апробирована методология геометрического моделирования сложных трёхмерных объектов на основе метода R-функций В.Л. Рвачёва и алгоритма Dual Contouring. Основные результаты:

1. Теория R-функций позволяет строить трёхмерные объекты произвольной сложности из простых аналитических примитивов (эллипсоид, сфера, суперэллипсоид, тор и др.) в виде единого математического выражения.

2. Алгоритм Dual Contouring на основе минимизации QEF сохраняет острые геометрические особенности и формирует полигональную сетку высокого качества.

3. Успешно построены модели фланцевого диска и автомобиля, что демонстрирует применимость подхода на основе R-функций к решению сложных прикладных задач.

4. В сравнении с традиционным методом CSG метод R-функций обладает преимуществами с точки зрения параметрической адаптивности, управления поверхностью и возможности повторного использования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Requicha A.A.G. Representations for rigid solids: Theory, methods, and systems // ACM Computing Surveys. — 1980. — Vol. 12, No. 4. — P. 437–464. DOI: 10.1145/356827.356833
2. Hoffmann C.M. Geometric and Solid Modeling: An Introduction. — Morgan Kaufmann, 1989. — 338 p.
3. Pasko A., Adzhiev V., Sourin A., Savchenko V. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications // The Visual Computer. — 1995. — Vol. 11, No. 8. — P. 429–446. DOI: 10.1007/BF02464333
4. Ricci A. A constructive geometry for computer graphics // The Computer Journal. — 1973. — Vol. 16, No. 2. — P. 157–160. DOI: 10.1093/comjnl/16.2.157
5. Shapiro V. Semi-analytic geometry with R-functions // Acta Numerica. — 2007. — Vol. 16. — P. 239–303. DOI: 10.1017/S096249290631001X
6. Рвачёв В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 4. — С. 765–767.
7. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. — Киев: Наукова Думка, 1982. — 552 с.
8. Shapiro V. Real functions for representation of rigid solids // Computer Aided Geometric Design. — 1994. — Vol. 11, No. 2. — P. 153–175. DOI: 10.1016/0167-8396(94)90030-2
9. Bloomenthal J. (Ed.) et al. Introduction to Implicit Surfaces. — Morgan Kaufmann, 1997. — 332 p.

10. Lorensen W.E., Cline H.E. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm // ACM SIGGRAPH Computer Graphics. — 1987. — Vol. 21, No. 4. — P. 163–169. DOI: 10.1145/37401.37422
11. Ju T., Losasso F., Schaefer S., Warren J. Dual contouring of Hermite data // ACM Trans. on Graphics. — 2002. — Vol. 21, No. 3. — P. 339–346. DOI: 10.1145/566570.566586
12. Garland M., Heckbert P.S. Surface simplification using quadric error metrics // Proc. SIGGRAPH 97. — P. 209–216. DOI: 10.1145/258734.258849
13. Kobbelt L.P., Botsch M., Schwaner U., Seidel H.-P. Feature sensitive surface extraction from volume data // Proc. SIGGRAPH 2001. — P. 57–66. DOI: 10.1145/383259.383265
14. Schaefer S., Ju T., Warren J. Manifold dual contouring // IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics. — 2007. — Vol. 13, No. 3. — P. 610–619. DOI: 10.1109/TVCG.2007.1012
15. De Araújo B.R. et al. A survey on implicit surface polygonization // ACM Computing Surveys. — 2015. — Vol. 47, No. 4, Art. 60. DOI: 10.1145/2732197
16. Shen T. et al. Flexible isosurface extraction for gradient-based mesh optimization // ACM Trans. on Graphics. — 2023. — Vol. 42, No. 4, Art. 37. DOI: 10.1145/3592430
17. Hwang J., Sung M. Occupancy-based dual contouring // SIGGRAPH Asia 2024 Conf. Papers, Art. 129, 11 p. DOI: 10.1145/3680528.3687581
18. Ramaijane T. et al. Evaluation of manifold dual contouring algorithms based on k-d tree and octree data structures // Informatica. — 2024. — Vol. 48, No. 3. — P. 399–418. DOI: 10.31449/inf.v48i3.5420
19. Shapiro V. Theory of R-functions and Applications: A Primer. — Technical Report TR91-1219, Cornell University, 1991.
20. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // Applied Mechanics Reviews. — 1995. — Vol. 48, No. 4. — P. 151–188. DOI: 10.1115/1.3005099
21. Nuraliev F.M., Inoyatov M.B. Geometric modeling of complex objects using R-functions // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. — 2025. — № 3(132). — С. 46–49. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/19452>
22. Nuraliev F.M., Inoyatov M.B. Geometric modeling of complex 3D objects in the AutoCAD environment using an RFM plugin based on R-functions theory [In Uzbek] // Modern science and technology: Global challenges and sustainable solutions. — 2026. — P. 694–702.