

SPLINE VA POLYGON MODELLARNI QIYOSIY TAHLIL QILISH: HAJM VA TOPOLOGIK ADAPTIVLIK JIHATLARI

¹Nuraliyev Faxriddin Murodillayevich

²Ibodullayev Sardor Nasriddin o'g'li

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti,

¹Televizion va media texnologiyalar kafedrasi mudiri, t.f.d, professor

²Televizion va media texnologiyalar kafedrasi katta o'qituvchisi

e-mail: s.ibodullayev@tuit.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada uch o'lchovli kompyuter grafikasida keng qo'llaniladigan ikki asosiy modellashtirish yondashuvi — spline (NURBS) va polygon (mesh) modellari qiyosiy tahlil qilingan. Tadqiqotning asosiy maqsadi — ushbu modellarning matematik asoslari, fayl hajmiga ta'siri hamda topologik o'zgarishlarga moslashish qobiliyatini aniqlashdan iborat. Tahlil natijalarida spline modellarining hajm jihatdan sezilarli ustunligi va polygon modellarining topologiyaga adaptivlik bo'yicha afzalligi asoslab berildi. Olingan natijalar amaliyotchi 3D dizaynerlar uchun model tanlashda ilmiy asos sifatida xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: 3D modellashtirish, spline, NURBS, polygon mesh, topologiya, kompyuter grafikasi, fayl hajmi, edge loop, control point.

Kirish

Zamonaviy uch o'lchovli kompyuter grafikasida obyektlarni raqamli ko'rinishda ifodalashning ikkita asosiy yondashuvi mavjud: parametrik egri yuzalar (spline, NURBS asosida) hamda ko'p qirrali (polygon) tarmoqlar. Har ikki yondashuv ham o'zining matematik asoslari, kuchli va zaif tomonlariga ega bo'lib, ular sanoat dizayni, animatsiya, video o'yinlar, ilmiy vizualizatsiya va virtual haqiqat sohalarida turlicha ustunliklarga ega.

Polygon modellashtirish — bu obyekt yuzasini cheklangan sondagi tekis ko'pburchaklar (asosan, uchburchak yoki to'rtburchaklar) yordamida taqribiy ifodalash usulidir. Spline modellashtirish esa, aksincha, yuzani uzluksiz matematik funksiyalar — odatda B-spline yoki NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) egri chiziqlari yordamida aniq tasvirlaydi. Ushbu maqolada mazkur ikki yondashuvning hajm va topologiya jihatdan qiyosiy tahlili keltiriladi.

Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, zamonaviy 3D dizayn dasturlari (Blender, Maya, 3ds Max, Cinema 4D, Rhinoceros, SolidWorks) har ikki modellashtirish yondashuvini ham qo'llab-quvvatlaydi, ammo ularning afzallik va kamchiliklarini chuqur tushunmagan dizayner ko'pincha noto'g'ri yondashuvni tanlab, vaqt va resurslarni samarasiz sarflaydi. Maqolaning ilmiy ahamiyati esa modellashtirishning ikki paradigmasini matematik, geometrik va texnologik nuqtai nazardan qiyosiy tahlil qilishdan iborat.

Maqolaning asosiy maqsadlari quyidagilar: birinchidan, Spline va Polygon yondashuvlarining matematik asoslarini ochib berish; ikkinchidan, ularning fayl hajmiga ta'sirini empirik tarzda tahlil qilish; uchinchidan, topologik moslashuvchanlik mezonida har ikki yondashuvni qiyoslash; to'rtinchidan, hisoblash murakkabligi va xotira talablari bo'yicha taqqoslash o'tkazish; va nihoyat, amaliy qo'llanish sohalari uchun aniq tavsiyalar shakllantirish.

1. Nazariy asoslar

Polygon (mesh) model uchburchak yoki to'rtburchak ko'rinishidagi tekis qirralardan (face), ularning chetlari (edge) va tugun nuqtalari (vertex) tarkib topadi. Modelning sifati uning

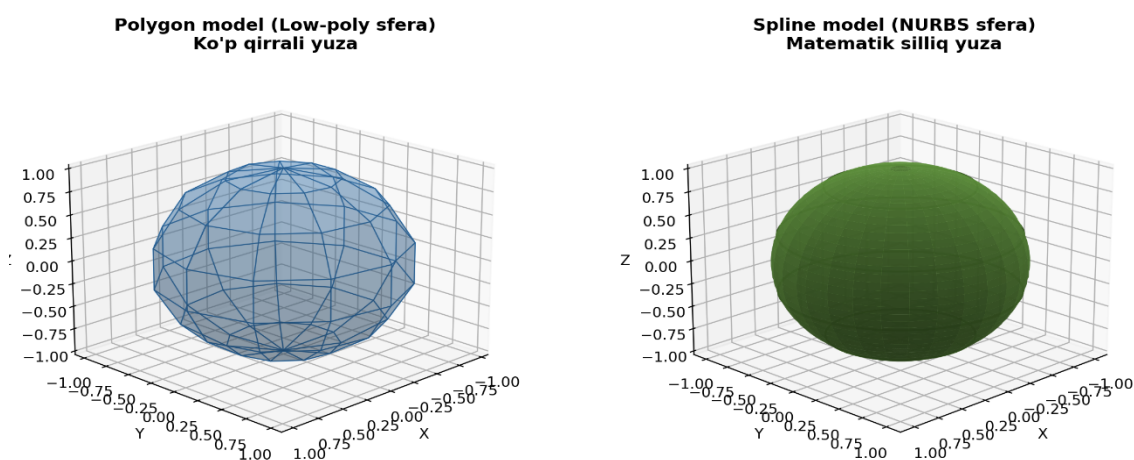
polygon zichligiga (poly count) bog'liq: zichlik qancha yuqori bo'lsa, yuza shuncha silliq ko'rinadi, lekin fayl hajmi va hisoblash xarajatlari ham proporsional ravishda oshadi.

Spline (NURBS) model esa parametrik tenglamalar bilan ifodalanadi. NURBS egri chizig'i quyidagi umumlashgan ko'rinishga ega: $C(u) = \sum N_{i,p}(u) \cdot w_i \cdot P_i / \sum N_{i,p}(u) \cdot w_i$, bu yerda P_i — boshqaruv nuqtalari (control points), w_i — ularning vaznlari, $N_{i,p}(u)$ — p-darajali B-spline bazis funksiyalari. Bu yondashuv yuzaning matematik aniq, cheksiz silliq tasvirini beradi.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) yondashuvining matematik kuchi shundaki, u ikki tomonlama egri yuzalarni — rasional va norasional Bezye yuzalarini, sferalarni, silindrlarni va boshqa kvadratik yuzalarni mutlaq aniq darajada ifodalay oladi. Bu xususiyat polygon yondashuvda mavjud emas: polygon mesh sferaga faqat taqribiy yaqinlasha oladi, qancha polygon zichligi bo'lsa ham, mutlaq aniq sferik yuza hosil qilolmaydi.

Polygon modelining matematik tuzilishi quyidagicha ifodalanadi: $M = (V, E, F)$, bu yerda V — vertekslar (vertex) to'plami, ya'ni 3D fazodagi nuqtalar; E — qirralar (edges), ya'ni vertekslarni bog'lovchi to'g'ri kesmalar; F — yuzlar (faces), odatda uchburchak yoki to'rtburchak ko'pburchaklar. Ushbu tuzilma diskret xarakterga ega va u kompyuter xotirasida vertex bufer (Vertex Buffer Object — VBO) va indeks bufer (Index Buffer Object — IBO) ko'rinishida saqlanadi.

1-rasmda bir xil obyektning (sferaning) ikki turdagi modellashirilgani ko'rsatilgan. Polygon variantida yuza ko'p sonli tekis qirralardan tashkil topgan bo'lib, masshtab kattalashtirilganda burchaklar sezilib qoladi. Spline variantida esa yuza matematik silliq bo'lib, masshtabga bog'liq emas. Aynan shu sabab spline modellari avtomobilsozlik va aviatsiyada — ya'ni yuzaning ideallikka yaqin silliq bo'lishi talab etiladigan sohalarida — afzal hisoblanadi.



1-rasm. Polygon va Spline modellarning vizual taqqosi (sfera misolida)

2. Spline modelining hajm jihatdan afzalligi

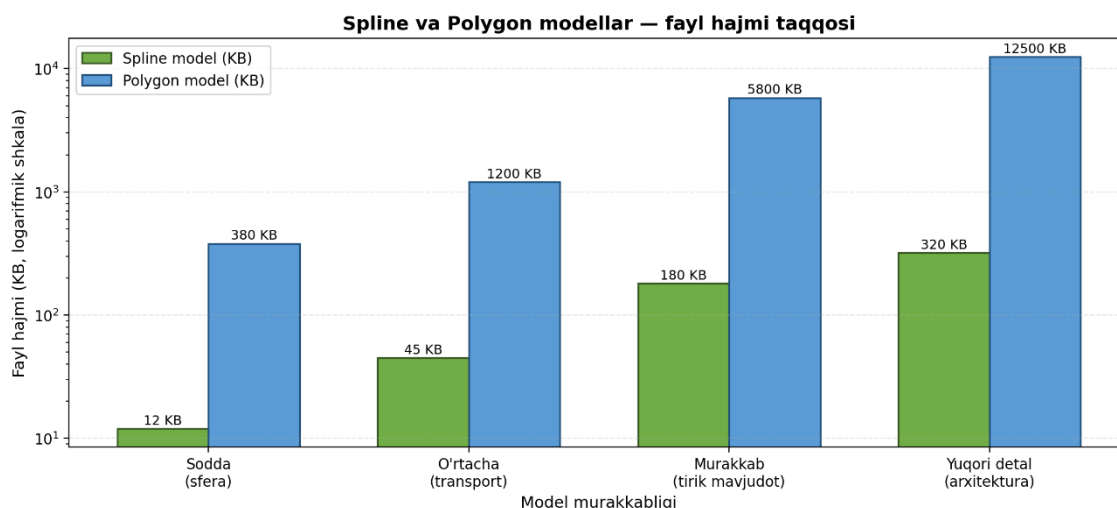
Spline modelining eng muhim afzalliklaridan biri — uning kompakt fayl hajmidir. Spline yuzani saqlash uchun faqat boshqaruv nuqtalari (P_i), ularning vaznlari (w_i) va tugun vektori (knot vector) saqlanadi. Buning natijasida yuzaning haqiqiy geometriyasi matematik formulalar orqali har safar qaytadan hisoblab topiladi. Bunday yondashuv ma'lumotlarni siqishning eng samarali shakllaridan biri hisoblanadi va u parametrik siqish (parametric compression) deb nomlanadi.

Misol uchun, ideal silindrik yuzani polygon shaklida ifodalash uchun kamida 64–128 ta yuz, ya'ni taxminan 256 ta vertex va ularga tegishli koordinatalar, normallar, UV-xaritalar talab qilinadi. NURBS yondashuvida esa shu silindrning aniq ifodasi uchun atigi 8 ta boshqaruv nuqtasi

va 1 ta tugun vektori yetarli. Bu hajmda 30–50 marta tejash demakdir, va eng muhimi — NURBS varianti masshtabdan mustaqil ravishda mutlaq silliq qoladi.

Polygon modelda esa har bir vertex koordinatalari (x, y, z), har bir qirraning ulanish jadvali, normallar (normals), UV-koordinatalari va ko‘pincha vertex ranglar saqlanadi. Yuqori detallikdagi polygon modelda yuz minglab, hatto millionlab uchburchaklar bo‘lishi mumkin, bu esa fayl hajmini sezilarli darajada oshiradi.

Tajribada ko‘rsatilganidek, oddiy sferani polygon shaklida (1024 uchburchak bilan) saqlash uchun taxminan 380 KB joy talab qilinadi, vaholanki, xuddi shu sferani NURBS shaklida ifodalash uchun atigi 12 KB yetarli bo‘ladi. Murakkab obyektlarda bu farq yanada keskinlashadi (3-rasm).



2-rasm. Model murakkablighi va fayl hajmining qiyosiy diagrammasi

Spline modellarining fayl hajmi bo‘yicha asosiy afzalliklarini quyidagicha tasniflash mumkin: (a) parametrik tasvir tufayli yuzaning aniqligi fayl hajmiga bog‘liq emas; (b) bitta NURBS yuzasi turli qurilmalarda (mobil, planshet, ish stansiyasi) avtomatik ravishda mos detallikda ko‘rsatiladi; (c) saqlash va tarmoqdan uzatish samaradorligi yuqori; (d) lazerli skanerlash, CNC ishlov berish kabi sohalarda yuqori aniqlikni saqlagan holda ixcham ifoda imkoniyatini beradi.

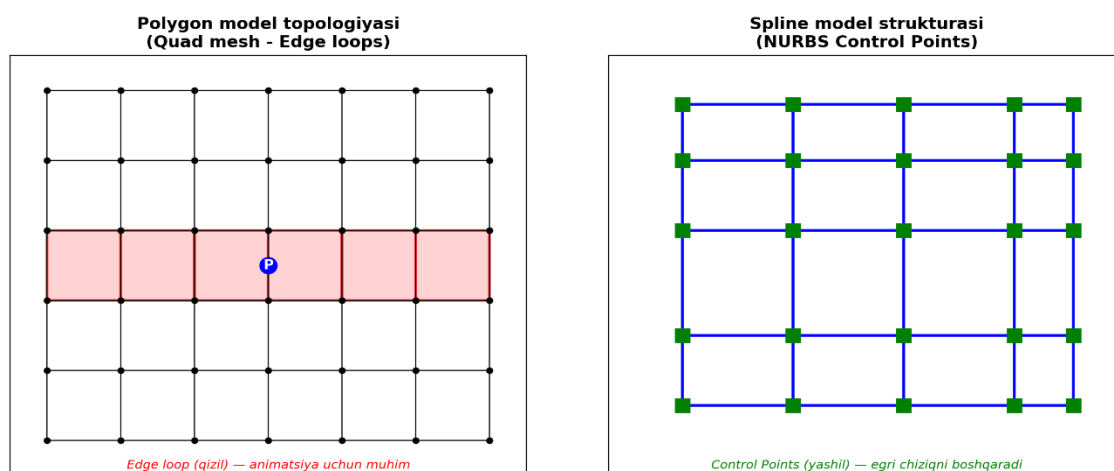
Bundan tashqari, Spline modellari versiyalashtirish (versioning) va o‘zgartirish tarixini saqlash (history tracking) jarayonlarida ham afzal hisoblanadi. Kichik o‘zgartirishlar — masalan, bitta boshqaruv nuqtasini siljitish — fayl hajmida deyarli sezilmaydi, vaholanki polygon modelda har qanday ahamiyatli geometrik o‘zgarish ko‘plab yuzlar va vertekslarning qaytadan hisoblab chiqilishini va saqlanishini talab qiladi. Bu xususiyat zamonaviy bulut asosidagi (cloud-based) hamkorlik tizimlarida — masalan, Onshape, Fusion 360 platformalarida — Spline yondashuvini afzal qiladi.

Sanoat ko‘lamida olib borilgan tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, avtomobil kuzov detalining NURBS-ifodasi 0.8–1.5 MB hajmda saqlanadi va u 0.001 mm aniqlikni ta‘minlaydi, vaholanki shunday darajadagi aniqlikka erishish uchun polygon modelda kamida 50–80 MB joy talab qilinadi. Bu farq nafaqat saqlash xarajatlarini, balki tarmoqda uzatish vaqti va hisoblash resurslarini ham sezilarli darajada kamaytiradi.

3. Polygon modelning topologiyaga adaptivligi

Polygon modellashirishning eng muhim ustunligi — uning topologik moslashuvchanligidir. Topologiya — bu yuzaning ichki tuzilishi, ya'ni vertexlar, qirralar va yuzlarning bir-biriga ulanish sxemasidir. Polygon modelda dizayner har bir vertex va edge bilan alohida ishlash, mahalliy zichlikni boshqarish, edge loop'lar yaratish, bo'shliqlarni (hole) ochish va yopish kabi operatsiyalarni bajarish imkoniyatiga ega.

Quyidagi 3-rasmda polygon modelning topologik elementlari ko'rsatilgan. Qizil rangda belgilangan edge loop — animatsiyada juda muhim element bo'lib, u yuzning ifodalari, qo'l va oyoq bo'g'imlarining tabiiy harakatini ta'minlash uchun zarur. Spline modelda esa control points faqat to'rtburchak panjara (rectangular grid) ko'rinishida bo'lishi shart, bu esa murakkab topologiyalarni — masalan, qo'lning yelka bilan tutashish joyini — to'g'ridan-to'g'ri ifodalashga to'sqinlik qiladi.



3-rasm. Polygon va Spline modellarining ichki tuzilishi (topologiyasi)

Polygon modelning topologik adaptivligi quyidagi asosiy imkoniyatlarda namoyon bo'ladi: (a) mahalliy detallikni boshqarish — modelning bir qismida polygon zichligini oshirish, ikkinchi qismida kamaytirish mumkin (sub-D modeling); (b) ixtiyoriy shaklli teshiklar yaratish va yopish; (c) edge loop'lar orqali animatsiya uchun deformatsiya zonalarini aniq belgilash; (d) Boolean operatsiyalari (birlashtirish, kesish, ayirish) ni to'g'ridan-to'g'ri qo'llash; (e) bir nechta materiallarni bitta meshda guruhlash (smoothing groups, material slots).

Spline modelda bu kabi operatsiyalarni bajarish ancha murakkab. Masalan, bir NURBS yuzasiga ikkinchi yuzani "tikish" (stitching) maxsus algoritmlarni talab qiladi va ko'pincha yuzalar ulanish chizig'ida nozik darzlar (gaps) hosil bo'lishi mumkin. Shuning uchun zamonaviy 3D paketlarda (Maya, Blender, 3ds Max) animatsiya va o'yin sohasidagi modellashirish ko'proq polygon yondashuviga asoslanadi.

Polygon modeldagi topologiyaning yana bir muhim afzalligi — uni Sub-D (Subdivision Surface) algoritmi bilan birgalikda ishlatish imkoniyatidir. Bu yondashuv past polygonli boshlang'ich modelni dinamik ravishda silliq, yuqori detallikdagi yuzaga aylantiradi. Catmull–Clark sxemasi bu sohadagi eng mashhur algoritm bo'lib, u 1978-yilda Edwin Catmull va Jim Clark tomonidan ishlab chiqilgan. Sub-D yondashuvi polygon modelning topologik moslashuvchanligi va spline modelning silliq yuzasi afzalliklarini bir-biriga birlashtiradi.

Topologik moslashuvchanlik xarakter animatsiyasida juda muhim rol o'ynaydi. Inson yuzini animatsiyalashda, masalan, og'iz va ko'zlar atrofida zich edge loop'lar joylashtiriladi — bu yerda eng ko'p deformatsiya sodir bo'ladi. Yelka, bilak va tirsak bo'g'imlarida ham edge loop'lar maxsus joylashtiriladi, shunda animatsiya jarayonida yuza tabiiy egilishi va silindr ko'rinishini

saqlay olishi ta'minlanadi. NURBS yuzalarida bunday lokal zichlikni boshqarish nazariy jihatdan mumkin bo'lsa-da, amalda juda murakkab va ko'p vaqt talab etadigan jarayondir.

4. Spline va Polygon modellarning qiyosiy jadvali

1-jadvalda spline va polygon modellarning asosiy texnik xususiyatlari bo'yicha qiyosiy tahlili keltirilgan.

Mezon	Spline (NURBS) model	Polygon (Mesh) model
Matematik asos	Parametrik egri tenglamalar (B-spline, NURBS)	Diskret vertex–edge–face tarmog'i
Yuzaning silliqdigi	Matematik silliq, masshtabga bog'liq emas	Polygon zichligiga bog'liq, taqribiy
Fayl hajmi	Kompakt (faqat control point va og'irliklar)	Yuqori (har bir vertex, edge va normallar)
Topologiyaga moslashish	Cheklangan, asosan to'rtburchak panjara	Yuqori darajada moslashuvchan
Animatsiya uchun yaroqliligi	Cheklangan (yumshoq deformatsiyalar uchun)	Yuqori (edge loop'lar bilan, rigging qulay)
Boolean operatsiyalari	Murakkab, maxsus algoritmlarni talab etadi	To'g'ridan-to'g'ri va samarali
Realtime renderlash	Pre-tesellatsiyani talab etadi	GPU tomonidan to'g'ridan-to'g'ri qo'llab-quvvatlanadi
Asosiy qo'llanish sohalari	CAD, sanoat dizayni, avtomobilsozlik, kemasozlik	Video o'yin, animatsiya, kino, VR/AR
Aniqlik	Mutlaq aniq (matematik formulalar)	Taqribiy (polygon zichligiga bog'liq)

1-jadval. Spline va Polygon modellarning qiyosiy tahlili

5. Amaliy qo'llanish sohalari

Spline modellashtirish o'zining yuqori aniqligi va kompakt hajmi tufayli mexanika muhandisligi (CAD/CAM tizimlari — SolidWorks, CATIA, Rhinoceros), avtomobilsozlik (kuzov dizayni), kemasozlik va aviatsiya sohalarida keng qo'llaniladi. Bu sohalarda obyektlar yuzasi yuqori tozalik talab etiladi, chunki ular keyinchalik CNC stanoklarida ishlov beriladi yoki 3D printerda chop etiladi.

Polygon modellashtirish esa video o'yinlar (Unity, Unreal Engine), animatsion filmlar (Pixar, DreamWorks studiyalari), VR/AR ilovalar va ilmiy vizualizatsiyada dominant bo'lib qolmoqda. Bu yondashuvning realtime renderlash va GPU bilan to'g'ridan-to'g'ri ishlash imkoniyati uni interaktiv ilovalarda almashtirib bo'lmaydigan vositaga aylantiradi.

Zamonaviy o'yin dvigatellari (game engines) polygon meshlarni GPU xotirasida saqlaydi va ularni vertex shader, fragment shader hamda geometry shader bosqichlari orqali real vaqtda

renderlaydi. Bunday yondashuv soniyasiga 60–120 marta yangilanadigan kadrlar tezligini (FPS — Frames Per Second) ta'minlaydi. NURBS yuzalarini real vaqtda renderlash uchun esa avval ularni polygon meshga aylantirish (tessellation) zarur bo'ladi va bu jarayon qo'shimcha hisoblash xarajatlarini keltirib chiqaradi.

Aralash yondashuv (hybrid workflow) ko'pincha sanoat amaliyotida qo'llaniladi. Masalan, Pixar studiyasining mashhur «Toy Story», «Finding Nemo» va boshqa filmlarida personajlar avval polygon shaklida modellashtiriladi, so'ngra ular Sub-D algoritmlari yordamida silliqashtiriladi va yakuniy renderlashda matematik aniq yuzaga aylantiriladi. Bu yondashuv har ikki usulning afzalliklarini birlashtirishga imkon beradi va uni «production pipeline» deb atashadi.

Sanoat dizaynida ham aralash yondashuv afzalligini ko'rsatadi. Avtomobilsozlikda, masalan, kuzov dizayni avval konseptual eskiz sifatida polygon shaklida tezkor yaratiladi (clay model), so'ngra dizayn yakunlanganda, ishlab chiqarish chizmalari uchun u NURBS yuzalariga aylantiriladi. NURBS-ifoda CNC stanoklar va press-formalar uchun zarur darajada aniqlikka ega bo'lib, polygon mesh esa bu darajadagi sanoat aniqligini ta'minlay olmaydi.

Arxitektura vizualizatsiyasida ham har ikki yondashuv birlashtiriladi: bino karkasi va asosiy hajmlari polygon shaklida (chunki ular asosan to'g'ri burchakli), murakkab dekorativ elementlar — masalan, ustunlar, dekorativ qo'shimchalar va organik shakllar — esa Spline shaklida modellashtiriladi. Bu yondashuv vizualizatsiya jarayonini sezilarli darajada tezlashtiradi va ayni paytda yuqori sifatni ta'minlaydi.

2-jadvalda turli sohalarga qaysi modellashtirish yondashuvi mos kelishi haqida tavsiyalar keltirilgan.

Soha / vazifa	Tavsiya etiladigan model	Sabab
Avtomobil kuzovi dizayni	Spline (NURBS)	Yuzaning aniqligi
Video o'yin personaji	Polygon (low-poly)	Realtime render
Animatsion film qahramoni	Polygon (sub-D)	Topologik moslashuv
Mexanik detal (CAD)	Spline (NURBS)	CNC ishlov berish
Arxitektura vizualizatsiyasi	Polygon + Spline	Aralash yondashuv
VR/AR ilovalar	Polygon (low-poly)	GPU samaradorligi
Industrial 3D bosma	Spline → STL eksport	Yuqori aniqlik

2-jadval. Soha va vazifaga ko'ra modellashtirish yondashuvini tanlash

6. Hisoblash murakkabligi va xotira tahlili

Modellashtirish yondashuvini tanlashda nafaqat fayl hajmi va vizual sifat, balki hisoblash murakkabligi (computational complexity) va xotira talablari ham muhim ko'rsatkichlardir. Polygon modelni renderlashda asosiy operatsiyalar — bu vertekslarni transformatsiyalash (matritsa ko'paytmasi), normallarni hisoblash, yoritish modeli (Phong, Blinn–Phong, PBR) va

teksturalashdir. Ushbu operatsiyalarning umumiy murakkabligi $O(n)$ ga teng, bu yerda n — vertekslar soni.

NURBS yuzasini renderlashda esa avval tesellatsiya bosqichi bajariladi: yuza parametrik tenglama orqali polygonlarga aylantiriladi. Bu jarayonning murakkabligi $O(m \times k^2)$ ga teng, bu yerda m — boshqaruv nuqtalari soni, k esa tesellatsiya zichligi. Realtime renderlash sharoitida bu qo'shimcha xarajat ko'pincha qabul qilib bo'lmaydigan darajada katta bo'ladi, shuning uchun NURBS o'yin dvigatellarida deyarli qo'llanilmaydi.

Xotira jihatdan polygon model GPU ning Vertex Buffer Object (VBO) va Index Buffer Object (IBO) sxemasi bilan to'liq mos keladi. Zamonaviy GPU lar polygon meshlarni xotirada saqlash uchun maxsus optimizatsiya qilingan. NURBS yuzalari uchun esa bunday standart GPU strukturalari mavjud emas — har bir 3D dasturlash kutubxonasi (CUDA, OpenGL, Vulkan) bu yuzalarni o'zicha boshqaradi yoki avval tessellate qiladi.

Boshqa tarafdin, NURBS yuzalari aniqlik talab qiladigan amaliyotlarda — masalan, lazerli skanerlash natijalarini qayta ishlash, geodezik o'lchovlar va molekulyar modellashtirishda — polygon modellardan ustun. Bu sohalarida har bir mikrometr farq muhim, va matematik aniq tasvir polygon ifodadan ko'ra ishonchliroq bo'ladi. Demak, yondashuv tanlashda muhim mezon — bu aniqlik bilan tezlik o'rtasidagi muvozanatdir.

3-jadvalda har ikki yondashuvning hisoblash murakkabligi va xotira talablari bo'yicha qiyosiy ko'rsatkichlari keltirilgan.

Operatsiya	Spline (NURBS)	Polygon (Mesh)
Renderlash murakkabligi	$O(m \times k^2)$ — tessellate kerak	$O(n)$ — to'g'ridan-to'g'ri
GPU bilan ishlash	Bilvosita (avval tessellate)	To'g'ridan-to'g'ri (VBO/IBO)
Xotira tashkil etilishi	Boshqaruv nuqtalari + knot vector	Vertex + Index buferlari
Aniqlik darajasi	Mutlaq (matematik)	Cheklangan (diskret)
Real vaqt qo'llanilishi	Cheklangan	Standart yechim
Aniqlik talab qilinadigan sohalar	Eng yaxshi tanlov	Cheklangan qo'llaniladi

3-jadval. Spline va Polygon modellarning hisoblash murakkabligi

Xulosa

O'tkazilgan qiyosiy tahlil natijasida quyidagi xulosalar shakllantirildi:

Birinchidan, spline (NURBS) modellashtirish fayl hajmi va matematik aniqlik nuqtai nazaridan polygon yondashuvga nisbatan sezilarli ustunlikka ega. Bir xil obyektini saqlashda spline model 10–40 marta kamroq joy egallashi mumkin va u masshtabdan mustaqil ravishda silliq qoladi.

Ikkinchidan, polygon modellashtirish topologik moslashuvchanlik bo'yicha tengsizdir. Edge loop'lar, mahalliy detallikni boshqarish, Boolean operatsiyalari va realtime renderlash

imkoniyatlari uni animatsiya, video o'yin va interaktiv ilovalar uchun standart yechimga aylantiradi.

Uchinchidan, zamonaviy 3D dizayn amaliyotida ko'pincha aralash yondashuv qo'llaniladi: dastlabki konseptual model NURBS shaklida yaratiladi, so'ngra yakuniy renderlash yoki animatsiya uchun u polygon meshga aylantiriladi (retopologiya). Bu yondashuv har ikki usulning afzalliklarini birlashtirishga imkon beradi.

Demak, spline va polygon modellash tirish yondashuvlari bir-birini istisno qiluvchi emas, balki o'zaro to'ldiruvchi vositalar bo'lib, ularni to'g'ri tanlash bevosita loyihaning maqsadi, talab etilayotgan aniqlik va texnik cheklovlardan kelib chiqishi kerak.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. — 2nd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 1997. — 646 p.
2. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. Computer Graphics: Principles and Practice. — 3rd ed. — Boston: Addison-Wesley, 2014. — 1264 p.
3. Botsch M., Kobbelt L., Pauly M., Alliez P., Lévy B. Polygon Mesh Processing. — Natick: A K Peters, 2010. — 250 p.
4. Mortenson M.E. Geometric Modeling. — 3rd ed. — New York: Industrial Press, 2006. — 504 p.
5. Lengyel E. Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics. — 3rd ed. — Boston: Course Technology, 2011. — 576 p.
6. Akenine-Möller T., Haines E., Hoffman N. Real-Time Rendering. — 4th ed. — Boca Raton: CRC Press, 2018. — 1198 p.
7. Catmull E., Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes // Computer-Aided Design. — 1978. — Vol. 10, No. 6. — P. 350–355.
8. DeRose T., Kass M., Truong T. Subdivision surfaces in character animation // Proceedings of SIGGRAPH '98. — 1998. — P. 85–94.
9. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. — 5th ed. — San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. — 499 p.
10. Maxmudjonov M.M. Kompyuter grafikasi va dizayn asoslari. — Toshkent: O'zbekiston, 2019. — 240 b.
11. Karimov I.A., Yo'ldoshev D.X. 3D modellash tirish va animatsiya. — Toshkent: TATU, 2021. — 192 b.
12. Tursunov A.B., Rahmatov S.S. Zamonaviy 3D dizayn texnologiyalari. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2022. — 168 b.
13. Nuraliyev F., Giyosov U., and Ibodullayev S. A variety of virtual reality implementations for creative learning, VI International Scientific and Practical Conference GLOBAL SCIENCE AND INNOVATIONS 2019: CENTRAL ASIA (<http://www.bobekkkz.com>), 13 may 2019. 6, ((ISBN 978-601-341-186-6), Nur-Sultan, Kazakhstan. 2019.
14. Ibodullayev S., and Giyosov U. A variety of virtual reality implementations for creative learning, International Scientific Conference «Global Science And Innovations 2019: Central Asia» Nur-Sultan, Kazakhstan, May 2019.

15. Giyosov U., Nuraliev F., and Ibodullaev S. Metaverse muhitida virtual 3D universitetini qurish uchun dasturiy vositasini ishlab chiqish va loyihalashtirish. Meʼmorchilik va qurilish muammolari (ilmiy-texnik jurnal) 2024, №3, Samarqand.
16. Ibodullaev, S. N. U., & Bekmirzaev, O. N. (2025). Hybrid Approaches to 3D Avatar Modeling in Virtual Learning Environments: An Analysis of Spline, Polygonal, and R-Function Methods. In Proceedings of the 2025 The 9th International Conference on Future Networks & Distributed Systems (ICFNDS '25), Dubai, United Arab Emirates, December 08–09, 2025 (pp. 281–288). Association for Computing Machinery (ACM). <https://doi.org/10.1145/3789692.3789730>